# Historia de las matemáticas

Lectura de *El paraíso de Cantor*

*Noel Arteche* – Curso 2018/19

## Índice

# Introducción

Los apuntes recogidos en estas páginas corresponden a la asignatura *Historia de las matemáticas*, impartida durante el segundo cuatrimestre del cuarto curso del grado en Matemáticas de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).

La asignatura propone un repaso a la crisis de fundamentos de la matemática de finales del siglo XIX y principios del XX a través de la lectura de *El paraíso de Cantor: la tradición conjuntista en la filosofía matemática*, obra incompleta del filósofo chileno Roberto Torretti, publicada en 1998.

Los apuntes aquí recogidos responden a las 22 preguntas de que consta el cuestionario propuesto por el profesor David Teira para seguir la lectura. Las respuestas están organizadas por semanas, en función de su orden en el curso, y cada par de respuestas viene acompañado de algunos comentarios del propio Teira sobre los temas tratados. En algunos casos se ha añadido la respuesta de algún compañero que ha sido considerada por el profesor como especialmente interesante.

Si bien los apuntes están pensados como trabajo de la asignatura (figura como PEC en los criterios de evaluación), cualquier persona interesada en la lectura de la obra de Torretti puede encontrar en este cuestionario una buena guía introductoria a la filosofía de la matemática.

**Noel Arteche Echeverría**

*En San Sebastián, a 15 de mayo de 2019*

## **PARTE I** – *Conjuntos*

- **<u>Semana 1</u>** (25 de febrero) – *Capítulos 1.1-1.3*

1. ***Haga una breve semblanza (1000 palabras) de Georg Cantor apoyándose en materiales que encuentre en la red —e incluya la referencia—.***

Georg Cantor nació en San Petersburgo el 3 de marzo de 1845. Vivió allí hasta los once años, cuando su familia se trasladó a Alemania, donde se instalaron primero en Wiesbaden y posteriormente en Fráncfort. Además de una sorprendente aptitud para la música, influencia de su madre —una gran violinista—, Cantor mostró ya en el instituto una gran habilidad para la matemática. Su padre quería que estudiara ingeniería, pero en 1862 terminaría por ceder a la insistencia de hijo, dejando que ingresara en la Universidad Politécnica de Zúrich para estudiar matemáticas.

Su padre muere un año después, legándole a Cantor una herencia cuantiosa. Ante esta situación, Cantor se dirige a la Universidad de Berlín (junto a Gotinga, uno de los grandes centros intelectuales para la matemática del siglo XIX), donde emprende en 1863 estudios de matemáticas, filosofía y física, aunque serán los dos primeros los que le cautiven genuinamente. Allí tendrá de profesores a eminentes matemáticos como Ernst Kummer, Karl Weierstrass y Leopold Kronecker, este último un personaje que jugaría un importante papel en su vida.

Tras una breve estancia en la Universidad de Gotinga durante el verano de 1866, Cantor presenta al año siguiente su tesis, enmarcada dentro de la teoría de números: *Sobre las ecuaciones indeterminadas de segundo grado*. Volverá a presentar esta tesis un año después en la Universidad de Halle, donde obtendrá el puesto de catedrático.

Es entonces cuando comienza su carrera como prolífico investigador matemático. En Halle, Eduard Heine le aconseja atacar la demostración de la unicidad de la representación de las series trigonométricas de Fourier, cuya demostración, presentada en 1822 en el famoso tratado *Théorie analytique de la chaleur*, era incompleta. Cantor logra resolver en un año lo que matemáticos de la talla de Riemann, Dirichlet o el propio Heine no habían conseguido.

El estudio de las series de Fourier le lleva a estudiar la estructura del conjunto de puntos en que la serie es discontinua, esto es, conjuntos de infinitos números reales. Así las cosas, en un momento en que empiezan a surgir las principales preocupaciones sobre la fundamentación de la matemática, Cantor publica en 1872 su definición del conjunto de los números reales como sucesiones convergentes de números racionales; lo hace justo a la vez que Dedekind presenta su definición de $\mathbb{R}$ mediante lo que hoy se llaman las «cortaduras de Dedekind».

A partir de 1873, Cantor se dedica por completo a la teoría de conjuntos y la principal consecuencia del estudio de esta: los números transfinitos. Como parte de sus estudios en los fundamentos de la matemática a través de la teoría de conjuntos, Cantor descubre que la idea de conjunto es anterior a la idea de número, y que esta última se origina en el conteo de los elementos de un conjunto. Al extender sus reflexiones sobre la cardinalidad de distintos conjuntos a conjuntos infinitos, Cantor da con los cardinales transfinitos: el tamaño de los conjuntos infinitos. Su primer resultado se publica en 1873, cuando demuestra que los números racionales son equipotentes a los naturales, esto es, pueden ponerse en correspondencia biunívoca. Cantor llama $\aleph_0$ (*aleph-null* o «aleph sub-cero») a este cardinal, y demuestra en 1874 que los reales no son equipotentes a los racionales: hay más reales que racionales; es un infinito «mayor».

A partir de este descubrimiento, Cantor parte en busca de otros infinitos, más grandes y más pequeños, una tarea que le acompañará hasta el final de su vida. No logrará dar con nada estrictamente comprendido entre el cardinal de los naturales y el cardinal de los reales, una proposición conocida como la «hipótesis del continuo». Fracasó tanto en su demostración como en su refutación, aunque es comprensible: como Gödel y Cohen demostrarían más adelante, la hipótesis del continuo es un enunciado indecidible en la teoría de conjuntos y debe aceptarse como axioma adicional.

Pese al inestimable apoyo de figuras tan importantes como la de David Hilbert, las ideas de Cantor toparon, desde sus más tempranas publicaciones, con la oposición del conservadurismo que dominaba la matemática de finales del siglo XIX, del que Kronecker era indudablemente su más destacado representante. La teoría de conjuntos y el formalismo y la abstracción que esta acarreaban fueron recibidos con reticencia por muchos matemáticos y filósofos de la ciencia, entre los que se hallaban Wittgenstein y algunos representantes de lo que luego sería la escuela constructivista. La oposición creció en 1891, cuando publicó su celebrado «argumento de la diagonal», con el que se demuestra la existencia de los números trascendentes (Lieuville había demostrado ya este resultado años antes, pero optaba por la construcción de un número trascedente concreto de forma algo artificiosa; Cantor no necesitaba dar con él para demostrar su existencia, y la llamada «diagonalización de Cantor» sería fundamental para futuros avances en la matemática moderna, como la resolución del problema de la decisión por parte de Turing años después). Este rechazo, así como sus constantes intentos por reconciliar sus ideas del infinito con sus profundas convicciones religiosas, lo llevaron a largos períodos de depresión que le alejaron de la investigación.

Sus depresiones se manifestaron en dos vertientes bien diferenciadas. Por un lado, mostraba gran preocupación por las implicaciones filosóficas de la teoría de conjuntos (le aterrorizaba la posibilidad de encontrar contradicciones que pusiesen en riesgo la consistencia de la teoría). Por otro lado, Cantor era firme defensor de que la obra literaria de Shakespeare había sido escrita por Francis Bacon. Durante la última década del siglo XIX llegó a escribir un trabajo serio sobre literatura isabelina.

En 1896 su depresión se ve agravada por varios episodios dramáticos: las sucesivas muertes de su madre, su hermano menor y su hijo más joven. En 1899, tras uno de estos episodios depresivos, pierde la confianza en su trabajo y abandona casi por completo la teoría de conjuntos. A partir de entonces la depresión no lo abandonará, llegando a ser ingresado en varias ocasiones por esta razón. Georg Cantor muere el 6 de enero de 1918 en un hospital psiquiátrico de Halle de un ataque al corazón.

REFERENCIAS:


- Artículo de Wikipedia de *Georg Cantor*, consultado el 22 de febrero de 2019
- STEWART, Ian (2018) *Mentes maravillosas: los matemáticos que cambiaron el mundo*, cap. 16: *El cardinal de continuo – Georg Cantor* (disponible como recurso en el curso virtual)

- STEWART, Ian (2017) *Infinity: A Very Short Introduction*, cap. 7: *Counting infinity*
- HODGES, Andrew (1983) *Alan Turing: The Enigma*, cap 2: *The Spirit of Truth*

**2. *Explique de qué modo se originan las ideas de Cantor sobre el infinito en el estudio de las series trigonométricas.***

Entre 1870 y 1872, Cantor ataca un problema planteado por Joseph Fourier en 1807 al presentar sus conocidas series trigonométricas, mediante las que una función real de variable real podía ser representada como una suma infinita de senos y cosenos. Fourier había dejado dos cuestiones sin resolver: bajo qué condiciones una función admitía este tipo de representación y si dicha representación, en caso de existir, sería única.

Cantor se enfrenta al problema considerando una función $f$ definida sobre un intervalo finito $I$, representable como una serie trigonométrica convergente para todo elemento del dominio, y logra dar con la demostración de la unicidad de la representación recurriendo a un resultado que debe cumplirse para todo elemento del intervalo $I$. Sin embargo, la condición resulta ser demasiado fuerte. Kronecker le sugiere que el resultado sigue siendo válido incluso si hay algunos valores «excepcionales» para los que la secuencia sobre la que trabaja Cantor no converge en absoluto.

Cantor comienza entonces a estudiar en detalle los conjuntos de puntos «excepcionales» y logra demostrar el mismo resultado incluso cuando existe un subconjunto finito del dominio $I$ que contiene a los puntos excepcionales. No contento, en 1872 va más allá y extiende el mismo resultado a subconjuntos infinitos de puntos excepciones en los que su sucesión no converge.

Es en este contexto donde Cantor se ve obligado a detallar su teoría de los números reales, construyendo este conjunto como extensión del conjunto conocido de los números racionales. Cantor llama $A$ al conjunto de los racionales y considera sucesiones de este tipo de números (concretamente sucesiones de Cauchy). Define una relación de equivalencia entre sucesiones y decide asociarle a cada sucesión un índice. Dos sucesiones tienen el mismo índice si son equivalentes según la relación definida. Cantor llama entonces $B$ al conjunto de los índices y define en él una relación de orden, así como una operación aditiva y una multiplicativa. Los elementos de $B$, esto es, los «índices», reciben el nombre de «magnitudes numéricas».

El siguiente paso en la construcción de Cantor consiste en crear más sucesiones de Cauchy, esta vez tomando elementos de $A$ y de $B$. Construye entonces un dominio $C$ de índices de las sucesiones creadas; repite el proceso creando sucesivos dominios $D$, $E$, etc.

Cantor da en este momento con la noción clave que motiva sus ideas sobre el infinito. En palabras de Torretti, «es claro que el dominio $B$, aunque dotado de una estructura algebraica parecida a la de $A$, es esencialmente más rico que este. En efecto, si bien cada elemento de $A$ corresponde, del modo explicado, a un elemento único de $B$, hay elementos de $B$ que no corresponden de este modo a ningún elemento de $A$». Pese a ser tanto $A$ como $B$ conjuntos infinitos, estos no pueden ponerse en correspondencia biunívoca; no existe una aplicación biyectiva de $A$ en $B$. Es aquí donde Cantor comienza a vislumbrar que, dentro de los conjuntos infinitos, ha de haber algunos «mayores» que otros.

- ***Comentario del profesor David Teira*** (26 de febrero)

Un aspecto interesante de vuestras respuestas es que me permiten apreciar algunas limitaciones del texto de Torretti. Sabía ya que apenas se ocupa del contexto en el que se producen los resultados que analiza y por ello mi primera pregunta pretendía que llenarais vosotros parte de esta laguna. Un aspecto importante es el de explicar la reacción que provocan los resultados de Cantor (la oposición de Kronecker, etc.), pues resulta difícil apreciar a partir del estudio de Torretti qué había de inaceptable en sus contribuciones a ojos de tantos de sus contemporáneos. En buena parte, es el problema, que podéis ver en las *Preguntas más frecuentes*, del infinito potencial versus actual. Pero ¿por qué un objeto de investigación abstracto habría de provocar reacciones tan enconadas? Veremos algunas de las razones a lo largo del curso.

Alguno de vosotros ha citado ya los textos introductorios que os recomendaba la semana pasada Antonio Juano. Si alguien se ha quedado con el gusanillo, el texto de Antonio Durán, *Cien años sin Cantor* explica el tema del origen de la teoría de conjuntos en las series trigonométricas con algo más de detalle que Torretti. Cualquier comentario comparándolos es bienvenido.

➢ **Semana 2** (4 de marzo) – *Capítulos 1.4-1.5*

**3. *Explique el concepto cantoriano de potencia (numerosidad) y los distintos tipos de infinito que permite distinguir.***

Para Cantor, la numerosidad de un conjunto es la propiedad fundamental que lo identifica si no atendemos más que a su estructura (esto es, a los elementos que lo forman y a la capacidad de distinguir a un elemento como distinto de los demás). La idea está estrechamente ligada a la forma en que dos conjuntos pueden relacionarse —a través de una aplicación— atendiendo a su estructura. Así las cosas, dados dos conjuntos $A$ y $B$, diremos que tienen la *misma potencia* o que son *equinumerosos* o *equipotentes* si existe una aplicación biyectiva de $A$ en $B$ (naturalmente, si $A$ es equipotente a $B$ también se tiene que $B$ es equipotente con $A$, pues por ser la aplicación biyectiva, esta tiene inversa y la inversa es biyectiva). Por el contrario, cuando podamos definir una inyección de $A$ en $B$, pero esa aplicación no sea sobreyectiva (y ninguna otra inyección posible lo sea), diremos que $A$ es *menos numeroso* que $B$.

Es intuitivo pensar que el conjunto con el que se pone en correspondencia biunívoca un conjunto $A$ es, de hecho, el conjunto de los naturales, pues la noción de numerosidad emana de la idea ordenar los elementos de $A$ y contar cuántos hay. Uno de los grandes hallazgos de Cantor es, precisamente, que no todos los conjuntos pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los naturales, lo que da lugar a distintos tipos de numerosidades o de infinitos.

Así, por ejemplo, Cantor demuestra que el conjunto de los números enteros y el de los números algebraicos son equinumerosos. Asimismo, el conjunto de puntos de un segmento de la recta real es equinumeroso con el conjunto de puntos contenido en un cuadrado o un cubo, aunque estos conjuntos no son equinumerosos con los naturales.

Se extrae de esta distinción la clasificación de dos tipos de infinitos: por un lado, el infinito *numerable* (*denumerable* según Torretti) de los números enteros y, por otro, un infinito «mayor», el de los números reales. A partir de esta separación, Cantor conjeturará que no hay ningún infinito intermedio entre la numerosidad de los enteros y la numerosidad de los reales, lo que se conoce como la «hipótesis del continuo».

**4. *Según Torretti, ¿qué dos vías confluyeron en la formación del concepto de transfinito?***

De acuerdo con el discurso de Torretti, se distinguen dos frentes por los que Cantor se aproxima a la idea del transfinito. Por un lado, la noción de numerosidad, que acarrea la demostración de que dentro del conjunto de los reales hay subconjuntos que, pese a ser infinitos, no son equinumerosos con los reales (así ocurre con los naturales, los enteros o los racionales, que son menos numerosos que $\mathbb{R}$). Según esto, dentro de la recta real se distinguen dos niveles de infinitud. Cantor demostrará entonces que, partiendo de un conjunto $A$, el conjunto potencia o conjunto de las partes de $A$ es siempre más numeroso que $A$. Puesto que las partes de $A$ conforman en sí mismas un conjunto, podemos aplicar la misma operación y obtener el conjunto de las partes de las partes de $A$, que es, según los resultados de Cantor, más numeroso que el anterior, obteniendo de esta manera infinitas numerosidades distintas entre sí. Esta es la primera vía de Cantor hacia el transfinito.

El segundo frente consiste en la extensión de la sucesión de los enteros, añadiendo más elementos a esta: los ordinales transfinitos, que, en palabras de Torretti, son «una continuación natural de la serie de los enteros positivos». Mediante esta extensión, Cantor se acerca a la idea de ordenar los elementos de un conjunto, haciendo una distinción entre los ordinales y los cardinales transfinitos, y estableciendo una aritmética para ambos dominios (frente a la aritmética de la sucesión de cardinales transfinitos, que respeta las reglas de la aritmética convencional, la aritmética con ordinales transfinitos violará algunos de los principios clásicos).

- ***Comentario del profesor David Teira*** (7 de marzo)

Lo que hemos visto esta semana es cómo se replantea los conceptos de cardinalidad y ordinalidad, sobre los que hasta entonces pivotaba el concepto de número. Os copio una respuesta de un alumno de cursos pasados (Pedro Pablo Rivas) con una extraordinaria capacidad de síntesis para ilustrarlo:

> *Las dos vías son las que conducen a los cardinales transfinitos y a los ordinales transfinitos. Los números cardinales son las potencias de los conjuntos concebidas como lo común de todos los conjuntos cuando se consideran equivalentes por biyecciones. Cantor demostró que el cardinal de* $\mathbb{N}$ *es menor que el de* $\mathbb{R}$*. Una forma de verlo es el método diagonal, por el que se puede construir una secuencia de dígitos que es diferente de todas las contenidas en una secuencia de secuencias. Entonces* $\mathbb{R}$ *no es un conjunto numerable, ya que cualquier número real del intervalo* $(0,1)$ *se puede codificar como una secuencia de ceros y unos. Por otro lado, una secuencia de ceros y unos también codifica un subconjunto de* $\mathbb{N}$*, por lo tanto,* $\mathbb{R}$ *es equivalente a* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *el conjunto de las partes o subconjuntos de* $\mathbb{N}$*. El argumento diagonal se puede generalizar, demostrando que todo conjunto* $K$ *es menos potente que* $\mathcal{P}(K)$*. Por tanto, existe una sucesión de conjuntos de potencia creciente:* $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$*… La hipótesis del continuo generalizada conjetura que no hay cardinales intermedios entre* $K$ *y* $\mathcal{P}(K)$*, pero Cantor no pudo demostrarla.*
>
> *Por otro lado, los números ordinales transfinitos son una extensión de la sucesión ordenada de los enteros que, como vimos en la segunda cuestión, surgieron como índices que ordenan las sucesiones de conjuntos derivados. El principio de que cada número tiene un sucesor genera los ordinales finitos* $1, 2, 3, \ldots$ *Cantor añade un segundo principio, que cada sucesión de ordinales sin un último elemento tiene un sucesor límite con la propiedad de que es el menor de sus sucesores. Mediante esta regla se genera el primer ordinal transfinito* $\omega$*. Otra vez la primera regla genera* $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$*, … Volviendo a la segunda regla se obtiene otro ordinal que se denota* $2\omega$*. Combinando así los dos principios se van generando* $3\omega$, $4\omega$*, …,* $n\omega$*, … Si se aplica la segunda regla a todos los ordinales que tenemos hasta ahora, obtenemos uno nuevo, que es natural llamar* $\omega^2$*. Análogamente se llega a* $\omega^n$, $\omega^\omega$*, etc. A pesar de esta proliferación de infinitos, cualquiera de ellos ordena solo un conjunto numerable.*

*En este hecho vemos una diferencia esencial entre números ordinales y cardinales que no se reconoce en el caso finito. Para generalizar los ordinales de modo que puedan enumerar cualquier conjunto infinito, Cantor postula que cualquier conjunto admite una buena ordenación, es decir una relación de orden lineal en el que cualquier subconjunto tiene un primer elemento. No puede probar este principio, hoy conocido como teorema del buen orden, aunque parece más aceptable intuitivamente que la hipótesis del continuo, y Cantor lo asume como una ley del pensamiento.*

*En resumidas cuentas, al tratar con el infinito, Cantor se ve obligado a refinar los conceptos de ordinalidad y cardinalidad, y a plantearse cómo casar con nuestras intuiciones básicas sobre ambas nociones las situaciones aparentemente paradójicas que plantea la aritmética transfinita (la hipótesis del continuo).*

Aunque estas dos ideas de ordinalidad y cardinalidad no sirven de hilo conductor, podéis encontrar una presentación alternativa de los conceptos fundamentales en las secciones 2.2, 2.3 y 3 del artículo de Gómez Bermúdez que os recomendaba la semana pasada. En las próximas semanas, profundizaremos en las consecuencias de este giro cantoriano

- **<u>Semana 3</u>** (11 de marzo) – *Capítulo 1.5*

**5. *¿Por qué el teorema del buen orden es central para el programa de Cantor?***

Cantor pretende, como hemos visto, ordenar las distintas numerosidades (los distintos tamaños en que se presentan los conjuntos infinitos), pero esta ordenación sólo es posible si se cumple el teorema del buen orden.

Decimos que un conjunto $A$ dotado de una relación de orden está *bien ordenado* o que su orden es *bien fundado* si contiene un primer elemento. En palabras del propio Cantor a Dedekind, «un conjunto linealmente ordenado $M$ se dice *bien ordenado* si cada parte no vacía de $M$ tiene un primer elemento». El conjunto bien fundado por excelencia es el conjunto de los números naturales, cuyo primer elemento es el cero —y en el que se verifica que cualquier subconjunto no vacío tiene un primer elemento—. El teorema del buen orden asegura que, sobre cualquier conjunto definible, existe una relación de orden bien fundada.

Es fácil ver por qué el teorema era esencial para su programa. Cantor había extendido la sucesión de los números naturales añadiendo los números transfinitos para tener una sucesión de ordinales que pudiesen aplicarse a los conjuntos infinitos, lo que le permitiría comparar las numerosidades de todos los conjuntos que pudiesen ser eventualmente definidos. Sin embargo, al dar el salto a los conjuntos infinitos, el ordinal asignado a un conjunto depende del orden sobre el que se trabaja. Así las cosas, el teorema del buen orden asegura que para todo conjunto existe un buen orden que podemos considerar como el orden canónico, lo que permite comparar su numerosidad con la de cualquier otro conjunto. Si, por el contrario, existiese un conjunto que no verificase el teorema, entonces sería imposible compararlo con cualquier otro conjunto, lo que derrumbaría el programa de Cantor en cuanto que este se ocupaba de «determinar las distintas valencias o potencias [esto es, las numerosidades] de las variedades presentes en la totalidad de la naturaleza, en la medida en que ésta se abre a nuestro conocimiento», lo que Cantor logra «mediante la formación del concepto general del enumerador de un conjunto bien ordenado, o, lo que es lo mismo, del concepto de número ordinal».

**6. *¿Por qué los cardinales transfinitos son distintos de los ordinales?***

En el dominio de lo finito no existe una distinción tan clara entre los ordinales y los cardinales, que caracterizan la numerosidad (la cantidad de elementos) de un conjunto de forma similar. Sin embargo, en la extensión de la noción de conteo a conjuntos infinitos se hace necesario distinguir entre ordinales y cardinales transfinitos.

Los ordinales transfinitos nacen de la idea de ordenar los elementos de conjuntos infinitos y, por tanto, el ordinal de un conjunto infinito depende del orden que se ha definido sobre él. La aritmética con ordinales transfinitos no respeta las propiedades de la aritmética clásica, y un mismo conjunto tendrá distintos ordinales dependiendo del orden adoptado.

Por el contrario, la cardinalidad de un conjunto sólo atiende a su estructura y no a la forma en que se ordenan sus elementos. Así las cosas, la sucesión de alephs caracteriza los conjuntos de forma más basta, atendiendo solo a su estructura y despojando de significado a sus elementos, pues deja de haber una relación de orden entre ellos y sólo podemos decir de un elemento si es igual o distinto de otro elemento. En la sucesión de los cardinales transfinitos (la sucesión de alephs) sí se verifican las propiedades de la aritmética clásica que los ordinales no conservan.

- ***Comentario del profesor David Teira*** (12 de marzo)

Aunque algunos de vosotros lo habéis tocado, permitidme una reflexión algo más general sobre lo que Cantor se traía entre manos al formular el teorema del buen orden: al poder comparar cualquier conjunto, con independencia de su cardinalidad, Cantor pudo definir las operaciones aritméticas básicas (suma, multiplicación) en número finitos y transfinitos. Justificaba así la denominación de números para sus transfinitos: aun cuando tuviesen características insólitas (la disociación de cardinalidad y ordinalidad), podíamos hacer con ellos las mismas cosas que con cualquier otro número. Esta definición está implícita en este pasaje de su correspondencia con Kronecker en 1884 (cuya traducción inglesa tomo de Ferreiros, *Labyrinth of Thought*, p. 277; está también en castellano en la edición de escritos de Cantor publicada por Ferreirós, que no tengo ahora a mano):

> *I depart from the concept of a "well-ordered set" and call well-ordered sets of the same type (or the same [ordinal] number) those which can be related to each other in a reciprocally univocal way, preserving the rank-order in both sides, and now I understand by a number the sign of the concept for a certain type of well-ordered sets. By limiting oneself to the finite sets, one obtains in this way the finite integers. But if one goes on to overview all the types of well-ordered sets of the first power, one necessarily arrives at the transfinite numbers of the second number-class, and through these to the second power.*

El número es el signo de un concepto, un tipo de conjunto bien ordenado: Cantor salta aquí de la que fue su concepción original de número, cardinales que miden cantidades, primordialmente los números naturales, a una concepción abstracta (anti-intuitiva en la época) en la que los números serían ordinales, índices que señalan a una posición en una serie, de modo tal que bajo un mismo concepto de número se puedan subsumir finitos y transfinitos. De ahí la osadía de justificar el teorema del buen orden como si fuese una ley del pensamiento, pues la mayor parte de sus contemporáneos no pensaban así. No obstante, como veremos más tarde con Frege y ya antes con Boole, apelar a las leyes del pensamiento se consagraría como vía regia para fundamentar la matemática en la lógica.

- **Semana 4** (18 de marzo) – *Capítulo 1.5-1.6*

**7. *¿Qué es la hipótesis del continuo y cómo afecta al programa de Cantor?***

Como habíamos visto anteriormente, Cantor se aproxima a la idea del transfinito desde dos frentes. Por un lado, a través de la operación que, dado un conjunto, permite obtener su conjunto potencia, donde había demostrado que $\mathcal{P}(K)$ era siempre más numeroso que $K$. La segunda vía de aproximación era la extensión de los números naturales mediante los ordinales transfinitos.

Sin embargo, estas dos aproximaciones terminarían por fusionarse en la sucesión de cardinales transfinitos o *alephs*. A partir de los sucesores de $\omega$ se va obteniendo una sucesión infinita de numerosidades distintas de la de los ordinales: la sucesión de cardinales. Como vimos, los cardinales son distintos de los ordinales en cuanto que solo atendemos a los elementos del conjunto como distintos unos de otros, independientemente de su orden. Cantor asigna al conjunto $[\omega]$ —y a cualquier conjunto equinumeroso con él— el cardinal $\aleph_0$ y demuestra que, dadas dos cardinalidades sucesivas, $\aleph_i$ y $\aleph_{i+1}$, no existe ningún conjunto tal que su cardinalidad sea estrictamente intermedia. Ahora bien, debemos poder determinar, dado un conjunto, qué cardinalidad le corresponde. Sabemos que los naturales tienen cardinalidad $\aleph_0$, ¿pero qué cardinalidad tienen los reales?

Es aquí donde la sucesión de alephs se relaciona con la infinita sucesión de conjuntos potencias del primer frente de avance. Cantor había demostrado que los reales son equipotentes con las partes de los naturales, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, pero no había podido asignarles un aleph a los reales. La idea de Cantor era que el siguiente aleph se correspondía exactamente con los reales: $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, de modo que no existe un subconjunto de los reales cuya cardinalidad este estrictamente comprendida entre la cardinalidad de los naturales y la de los reales. Esta es la célebre *hipótesis del continuo* de Cantor.

La hipótesis equivale a decir que, en la sucesión de alephs, las cardinalidades sucesivas se corresponden con las numerosidades de los conjuntos potencia. En otras palabras, que aumentar en un paso en la sucesión de alephs equivale a aplicar la operación $K \mapsto \mathcal{P}(K)$, de modo que si $|K| = \aleph_i$, entonces $|\mathcal{P}(K)| = \aleph_{i+1}$, lo que se conoce como la *hipótesis generalizada del continuo.*

Es clave tener en cuenta la relación entre la hipótesis generalizada del continuo y el teorema del buen orden discutido en cuestiones anteriores. Como apunta Torretti, «la hipótesis generalizada del continuo implica el teorema del buen orden (pero no es implicada por él). Por lo tanto, sólo cabría admitirla como un principio que no se demuestra. [...] Es claro que, bajo la hipótesis generalizada, los alephs darían abasto para cubrir todas las numerosidades de la "naturaleza corpórea y espiritual"», justamente el gran objetivo de Cantor, que fracasó en sus intentos de demostrar la hipótesis.

**8. *¿Por qué no toda «pluralidad bien definida» sería un conjunto en el sentido de Cantor?***

En 1902, Bertrand Russell escribe a Frege haciéndole notar que la idea fundamental sobre la que ha construido su definición de número (el número $n$ es el conjunto de todos los conjuntos de $n$ elementos) da lugar a una paradoja (la célebre paradoja de Russell). Reflexionando sobre el teorema de Cantor (cualquier conjunto tiene cardinalidad estrictamente menor que su conjunto potencia), Russell había notado que las construcciones de la forma «el conjunto de todos los conjuntos contenidos en sí mismos» incurren en paradojas. Suponemos que no hay nada que impida que un conjunto pueda tenerse a sí mismo como miembro y definimos $A$ como el conjunto de todos los conjuntos que no están contenidos en sí mismos: $A = \{x : x \notin x\}$. El conjunto está bien definido (es una «pluralidad bien definida» en el sentido cantoriano), en cuanto que, dado un elemento, tenemos forma de saber si el elemento en cuestión pertenece al conjunto. Sin embargo, si tomamos $x = A$, incurrimos en una paradoja. Si $A \in A$ entonces $A \notin A$; si $A \notin A$, entonces $A \in A$. Cuando pertenece, no pertenece; cuando no pertenece, pertenece (*when it does, it doesn't; when it doesn't, it does*).

Podría parecer que la teoría de conjuntos se derrumba ante un resultado como este, pero al propio Cantor no le preocupaba demasiado. A diferencia de Russell, que trabaja con *clases* (extensiones de conceptos), Cantor no presupone que todo conjunto bien definido sea necesariamente un concepto, ni que todo concepto constituya un conjunto. En una carta a Dedekind en agosto de 1899, Cantor expone con total tranquilidad otra de estas paradojas (la paradoja de Burali-Forti), pero demuestra que no afectan en lo más mínimo a su programa.

En su carta, Cantor distingue dos tipos de «pluralidades bien definidas» y es aquí donde explica que no todas son necesariamente conjuntos. Por un lado, existen pluralidades que al ser consideradas como un todo dan lugar a contradicciones; en palabras de Cantor, son «imposibles de captar como una unidad». Caen en este grupo los conjuntos de la paradoja de Russell, que son imposibles de captar como unidad (intuitivamente, el hecho de que un conjunto pertenezca a sí mismo da lugar a una noción de recursión infinita que hace imposible captarlo como un todo acabado). Por otro lado, están aquellas pluralidades que, además de estar bien definidas, «se dejan concebir sin contradicción como "estando reunidas"». Es a este tipo de pluralidades a las que Cantor llama propiamente *conjuntos*.

Así las cosas, Cantor se preocupa por discernir las pluralidades *consistentes* de aquellas que no lo son, presentando resultados que permiten caracterizar la consistencia y aislar las pluralidades de un tipo de las de otro. Identifica, además, que la totalidad de los ordinales, así como la totalidad de los cardinales, son ambas pluralidades inconsistentes: no son conjuntos.

Esta distinción en sí misma no derrumba el programa de Cantor, pero sí plantea un problema importante: ¿cómo saber si una pluralidad bien definida es o no consistente? Es un problema que afecta no solo a lo infinito, sino también a lo finito. Conducirá a Cantor a reflexiones filosóficas en las que defenderá la compatibilidad del infinito actual y potencial, así como la libertad como esencia de la matemática.

- ***Comentario del profesor David Teira*** (19 de marzo)

Todos habéis expuesto razonablemente bien en qué consiste la hipótesis del continuo, pero no todos os habéis detenido por igual es sus consecuencias para el programa de Cantor. El problema de fondo es que no sabemos la verdadera cantidad de elementos del continuo, o conjunto de los reales. Por lo tanto, no está claro que sea un conjunto bien definido ni que sea posible ordenarlo según su numerosidad.

Es decir, tenemos por un lado en juego la propia definición del concepto de conjunto, pues si el conjunto de los reales no tuviera un cardinal, el programa de Cantor quedaría en entredicho (¿podría establecerse la aritmética transfinita con semejante excepción?). Por otro lado, apelando a los resultados posteriores de Cohen, dependiendo de si incorporamos o no la hipótesis del continuo, la teoría de conjuntos se interpretará de distinto modo (no es necesario entrar aquí, pues excede el programa del curso).

Soraya Izquierdo añade, por cierto, una cita de Cantor muy oportuna para apreciar la perspectiva que Cantor tenía sobre su logro:

> *Una de las tareas más importantes de la teoría de los conjuntos, que creo haber resuelto en lo principal en, consiste en la exigencia de determinar las distintas valencias o potencias [esto es, las numerosidades] de las variedades presentes en la totalidad de la naturaleza, en la medida en que ésta se abre a nuestro conocimiento. Lo he logrado mediante la formación del concepto general del enumerador de un conjunto bien ordenado, o, lo que es lo mismo, del concepto de número ordinal.*

Respecto a la segunda pregunta, hay varios puntos de interés.

De nuevo la propia definición de conjunto: una vía que explorarán Frege y Russell es la de definir los conjuntos como si fueran conceptos, entidades semánticas que contribuyen, por ejemplo, a decidir si una proposición es verdadera o falsa (además de lógicos, ambos autores fueron filósofos del lenguaje). De ahí, la dificultad de las paradojas —Burali-Forti, etc.—: delatan la existencia de conjuntos que apelan a conceptos mal definidos. Como algunos de vosotros apuntáis, Cantor no suponía la equivalencia entre conjunto y concepto. De ahí que no tuviera dificultad en aceptar pluralidades inconsistentes, aunque denominase conjunto sólo a aquellas que sean consistentes.

Como apuntaba uno de mis estudiantes el pasado curso, las ambiciones teológicas de Cantor están implícitas en esta posición

> *Para [Cantor], los transfinitos no son meros conceptos, sino que existen como entidades que trascienden las mentes humanas, y de las que las teorías matemáticas son modelos. Otras ciencias podrían investigar los conjuntos como entes naturales, o bien puede haber propiedades de los conjuntos vedadas al intelecto humano (quizá la hipótesis del continuo) pero que estarían presentes a los ojos de Dios. Si hace un momento la coherencia lógica exigía la restricción de los conjuntos respecto a las clases, ahora la trascendencia de los conjuntos extiende su realidad más allá de las clases definidas mediante conceptos. Además, la consistencia de los conjuntos ya no es una simple regla de un juego formal, sino que debe suponerse a priori en tanto estructura de algo que existe objetiva e independientemente.*

Es decir, Cantor sería, en este aspecto, un realista acerca de la existencia de los conjuntos. En estas próximas semanas veremos algunas posiciones alternativas.

- **<u>Semana 5</u>** (25 de marzo) – *Capítulos 1.7-1.8*

**9. *Explique la controversia entre Poincaré y Zermelo a propósito del axioma de selección.***

En 1904, Ernst Zermelo presenta una demostración del teorema del buen orden que depende fundamentalmente de un aserto conocido como el *axioma de selección*: dada una familia de conjuntos, existe una función selectora que, dado uno de los conjuntos de la familia, selecciona uno de sus elementos. Así, Zermelo logra demostrar aquello que Cantor había llamado «ley del pensamiento» (el teorema del buen orden) apelando a una cuestión más fundamental, que el propio Zermelo había calificado de «principio lógico [que] no puede derivarse de uno más simple, pero [que] se aplica universalmente sin titubeos en el razonamiento matemático». Tan fundamental, de hecho, que cualquiera de los dos asertos implica el otro.

La demostración de Zermelo presentaría importantes controversias en la comunidad matemática, suscitando críticas entre quienes no creían en el teorema del buen orden y que, por tanto, se mostraban escépticos ante el axioma de selección. Este era el caso de matemáticos como Borel, Lebesgue o Peano. Ante estas críticas, Zermelo publica, cuatro años después, su *Nueva demostración de la posibilidad de un buen orden*, aunque esta sigue dependiendo del axioma de selección. Zermelo aprovecha entonces para responder a las críticas recibidas por su anterior trabajo. Una de las más destacables venía del matemático francés Henri Poincaré.

En una serie de artículos de la época, Poincaré había criticado los programas de fundamentación de la matemática que se estaban llevando a cabo (el conjuntismo cantoriano, por un lado, y el logicismo russelliano, por otro). En su opinión, ambos programas daban lugar a paradojas porque sus definiciones caían en una circularidad viciosa: los conjuntos y objetos definidos se contienen a sí mismos en la definición. Así ocurre con la paradoja de Russell, donde el conjunto «de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos» se construye haciendo referencia a una totalidad de conjuntos en la que está contenida el conjunto que se está definiendo.

Poincaré acusa a Zermelo de que algunos de los objetos de su primera demostración del teorema del buen orden están definidos de esta forma. Zermelo no solo lo reconoce, sino que pone de manifiesto que esto también ocurre en su segunda demostración y no lo juzga un problema. Este tipo de definiciones se conocen como *no predicativas* (para Russell este tipo de proposiciones «impredicativas» no son capaces de definir conjuntos porque dan lugar a la paradoja que él mismo intentaba evitar) y Zermelo argumenta que aparecen en muchas áreas de las matemáticas donde nunca se habían criticado (muchas definiciones del análisis, la demostración de Cauchy del teorema fundamental del álgebra…).

La cuestión fundamental puede resumirse en que, para Poincaré, las definiciones impredicativas no son válidas porque no constituyen un «requisito de constructibilidad» que permita crear estos objetos. Esta es la controversia entre la matemática conjuntista y la matemática constructivista. Para los conjuntistas basta con demostrar la existencia de un objeto sin construirlo (así ocurre con el argumento de la diagonal de Cantor); la corriente constructivista, por otro lado, no acepta la existencia de un objeto si no se determina la forma de dar con él. Este enfrentamiento marca gran parte de la discusión matemático-filosófica durante el siglo XX.

**10.** ***¿Por qué se hizo necesario definir axiomáticamente la teoría de conjuntos?***

Como se ha comentado anteriormente, Zermelo se había propuesto dar rigor formal a la teoría cantoriana, para lo que había empezado demostrando el teorema del buen orden. Su objetivo, en general, consistía en lograr que la teoría de conjuntos estuviese libre de las paradojas que habían ido presentándose sucesivamente (la antinomia de Russell, la paradoja de Burali-Forti…) y que habían provocado el escepticismo de muchos matemáticos en torno a la consistencia de la teoría y a la eventual posibilidad de usarla para sustentar cualquier otra rama de las matemáticas. Estas paradojas aparecían ya en muchas de las versiones de la teoría de conjuntos, como las desarrolladas por Frege o Peano, en las que la idea de conjunto iba asociado a un *concepto* en el sentido lógico clásico, lo que provocaba las paradojas.

De modo más personal, Zermelo obró no sólo motivado por la idea de evitar las paradojas, sino con el objetivo de delimitar con precisión los supuestos necesarios para demostrar el teorema del buen orden y responder así a sus críticos. En palabras del propio Zermelo en 1908:

> *En estas circunstancias no queda en la actualidad otro recurso que emprender el camino al revés y, partiendo de la «teoría de conjuntos» históricamente dada, buscar los principios que se requieren para fundamentar esta disciplina matemática. Esta tarea debe resolverse de tal modo que los principios se restrinjan los suficiente para excluir todas las contradicciones, pero a la vez sean lo bastante amplios para retener todo lo que hay de valioso en dicha teoría.*

Así las cosas, influido por la nueva perspectiva sobre los métodos axiomáticos popularizados por Moritz Pasch y David Hilbert durante el siglo XIX, Zermelo construyó su teoría axiomática de conjuntos a partir de siete proposiciones fundamentales (axiomas) y dos conceptos primitivos, el de *conjunto* y el de *pertenencia*.

➢ ***Comentario del profesor David Teira*** (26 de marzo)

Vuestras respuestas, una semana más, no son muchas, pero son acertadas, pero, como de costumbre, debo añadir algo de contexto y en esta ocasión la Wikipedia (como bien ha visto Soraya Izquierdo) me lo pone fácil:

(a) Hasta finales del siglo XIX, el axioma de elección se usaba casi siempre implícitamente.
(b) No siempre se requiere el axioma de elección. Si $X$ es finito, el axioma necesario se deduce de los otros axiomas de la teoría de conjuntos.
(c) La dificultad aparece cuando no hay una elección natural de elementos de cada conjunto. Si no se pueden hacer elecciones explícitas, ¿cómo saber que existe el conjunto deseado? Por ejemplo, supóngase que $X$ es el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de los reales. Primero se podría intentar proceder como si $X$ fuera finito; pero si se intenta escoger un elemento de cada conjunto, como $X$ es infinito, el procedimiento de elección no terminará nunca y nunca se podrá producir una función de elección para $X$. Luego se puede intentar el truco de tomar el elemento mínimo de cada conjunto; pero algunos subconjuntos de los reales, como el intervalo abierto $(0, 1)$, no tienen mínimo, así que esta táctica no funciona tampoco.

(d) La razón por la que se podían escoger elementos mínimos de los subconjuntos de los naturales es que éstos vienen ya bien ordenados: todo subconjunto de los naturales tiene un único elemento mínimo respecto al orden natural. Tal vez a este punto uno se sienta tentado a pensar: «aunque el orden usual de los números reales no funciona, debe ser posible encontrar un orden diferente que sea, este sí, un buen orden; entonces la función de elección puede ser tomar el elemento mínimo de cada conjunto respecto al nuevo orden». El problema entonces se reduce al de encontrar un buen orden en los reales, lo que requiere del axioma de elección para su realización: todo conjunto puede ser bien ordenado si y sólo si vale el axioma de elección.

(e) Una demostración que haga uso del axioma de elección nunca es constructiva: aun si dicha demostración produce un objeto, será imposible determinar exactamente qué objeto es. En consecuencia, aunque el axioma de elección implica que hay un buen orden en los reales, no da un ejemplo. Sin embargo, la razón por la que se querían bien ordenar los reales era que para cada conjunto de $X$ se pudiera escoger explícitamente un elemento; pero si no se puede determinar el buen orden usado, tal elección no es tampoco explícita. Esta es una de las razones por las que a algunos matemáticos les desagrada el axioma de elección; los constructivistas, por ejemplo, afirman que todas las pruebas de existencia deberían ser completamente explícitas, pues si existe algo, debe ser posible hallarlo; rechazan así el axioma de elección, pues afirma la existencia de un objeto sin decir qué es. Por otro lado, el solo hecho de que se haya usado el axioma de elección para demostrar la existencia de un conjunto no significa que no pueda ser construido por otros métodos.

La oposición entre matemática abstracta y constructiva a la que alude Torretti queda bien clara en los párrafos anteriores. El axioma de elección afirma que, dados ciertos conjuntos, existe otro que no podemos definir explícitamente. Pues, ¿cómo elegir el elemento particular de aquellos que habría de definir este segundo? De fondo estaba, por supuesto, el problema de ordenar el conjunto de los reales (el continuo cantoriano) y la posibilidad, que veíamos en semanas anteriores, de construir una aritmética transfinita. La matemática abstracta apela a leyes del pensamiento como justificación última del axioma de elección. La constructiva niega que nuestro pensamiento funcione así: sólo podemos entender aquello que podemos realmente hacer. Este es el trasfondo de las objeciones de Poincaré.

Vuestras respuestas sobre la axiomatización interpretan bien a Torretti (muy bien el apunte de Guillermo Villaverde, comparando su lectura con la de Mosterín), pero creo que sólo podremos apreciar con detalle el alcance del proyecto axiomático cuando nos ocupemos de Hilbert estas próximas semanas. Volveremos a ello.

→ *Respuestas 9-10 de Guillermo Villaverde*

La crítica de Poincaré al planteamiento de Zermelo —junto con la de muchos otros— forma parte de la oleada de objeciones que levantó su «demostración» del teorema del buen orden. En dicha demostración Zermelo probaba el teorema del buen orden sobre la base de un supuesto no probado (de ahí las comillas), el axioma de selección. De hecho, el axioma de selección (o axioma de elección, como se conoce habitualmente) es independiente de la teoría estándar de conjuntos (es decir, la teoría de conjuntos en la axiomatización de Zermelo-Fränkel). Y por esa razón es necesario indicar explícitamente su incorporación a la lista conjunto de axiomas usados cuando se decide hacerlo así, como sucede con la teoría de conjuntos ZFC: las siglas se refieren al uso de Zermelo-Fränkel más el axioma de elección. Ha de notarse también que, una vez asumidos los axiomas básicos de la teoría ZF, el axioma de elección resulta ser equivalente al teorema del buen orden.

En cualquier caso, la crítica a este axioma se asentaba, en el caso de Poincaré, sobre un determinado modelo de comprensión de la actividad matemática, a saber, aquel que pone el criterio de existencia de los objetos matemáticos en su construibilidad (y no en vano, Poincaré será uno de los principales pesos del intuicionismo). De hecho, algo de este modelo es lo que trasluce en las objeciones que plantea Poincaré al enfoque de Zermelo, pero también al de Cantor, Hillbert y el formalismo. Su idea es que todos estos enfoques cometen el error de utilizar términos cuya definición incluye referencias a conjuntos al que el propio término pertenece —error, por otro lado, que es el que hace brotar las conocidas paradojas de Russell, Burali-Forti, etc. Semejante circularidad en la definición estaría presente, según Poincaré, en las nociones de ordinal de todos los ordinales (Burali-Forti), o de conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos (Russell).

La respuesta de Zermelo a esta objeción consiste en señalar que semejante estructura circular puede efectivamente estar presente en algunos conceptos centrales de la teoría de conjuntos, pero que también lo está en otras ramas de la matemática (como, por ejemplo, el análisis) y nadie considera que por ello sean ilegítimas. Si el axioma de elección ha de caer por la crítica de Poincaré, entonces debe arrastrar con él, y por la misma razón, a una gran parte de la matemática clásica. Cuando se trata de precisar qué es entonces exactamente lo que se considera ilegítimo en la estructura circular de definición entonces aparecen (como en el caso de Thiel) criterios que no tienen que ver con la circularidad en la definición misma, y sí con la constructibilidad de los objetos implicados en ella.

*

De entrada, el objetivo principal de la axiomatización de la teoría de conjuntos por parte de Zermelo es, como él mismo establece en su escrito de 1908, evitar las paradojas («antinomias») que aquejaron a esta teoría en sus primeros tiempos. Para ello, se propone especializar los axiomas de dicha teoría.

En el trasfondo de esta afirmación debe situarse como marco general el desplazamiento que sufre el concepto de sistema axiomático en la matemática contemporánea. Torretti explora algunos de los rasgos de este desplazamiento, y lo hace situándose polémicamente frente a otras interpretaciones de dicho desplazamiento (por ejemplo, la de Jesús Mosterín en Los lógicos). Según Mosterín, lo esencial de la transformación del axiomatismo se puede entender a partir de la polémica entre Frege y Hilbert a este respecto. En esta polémica Frege defendía, con una serie de artículos titulados *Über die Grundlagen der Geometrie*, lo que algunos autores denominan concepción «tradicional» del método axiomático. Esta concepción clásica o tradicional encuentra su formulación paradigmática en los Elementos de Euclides y se puede resumir de la siguiente manera: una teoría axiomática, según esta concepción, es un conjunto de verdades sobre un determinado ámbito de realidad, con la peculiaridad de que todos los conceptos empleados en esa teoría se definen a partir de unos pocos conceptos primitivos no definidos y todas las verdades de esa teoría se obtienen a partir de unas pocas verdades primeras no demostradas. Estas «verdades primeras no demostradas» son precisamente los axiomas de la teoría.

Frente a esta concepción axiomática tradicional, Hilbert representa en 1899 una nueva manera de hacer matemáticas y, sobre todo, aunque sólo implícitamente, un nuevo modo de entender qué se está haciendo cuando se hacen matemáticas. En una carta de diciembre de ese año a Frege, Hilbert escribía: «Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y sus elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente. Si entiendo por puntos, etc., cualquier sistema de cosas, por ejemplo el sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc., y considero que todos mis axiomas resultan válidos para esas cosas, entonces también resultan válidos para esas cosas mis teoremas, como, por ejemplo, el de Pitágoras». Y, en efecto, aquí está recogida –según Mosterín– la característica esencial del nuevo axiomatismo: una teoría axiomática no describe un determinado ámbito de objetos de la realidad, sino que los propios axiomas de la teoría constituyen la definición implícita de los objetos de la que ella trata, con absoluta independencia de que esos objetos sean o no «reales». Las palabras punto, recta, plano, etc., como se lamenta Frege, no designan ya nada que tenga significado intuitivo, sino que ser un punto, una recta o un plano se reduce a satisfacer los axiomas correspondientes de la teoría. Y precisamente por ello, porque basta con cumplir los axiomas para ser un objeto de ese tipo, todo aquello que satisfaga esos axiomas (incluso el «sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc.») será un modelo de la teoría. Por supuesto, puesto que no tiene objetos externos con los que medirse, el criterio de verdad de un sistema axiomático no puede ser ya el criterio de la correspondencia, sino que tiene limitarse a la mera consistencia: «Si los axiomas arbitrariamente establecidos, junto con sus consecuencias, no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos, entonces existen las cosas definidas por los axiomas. Este es para mí el criterio de verdad y de existencia». Para Torretti, sin embargo, la modificación esencial del nuevo axiomatismo no parece ser el paso de «verdades sobre objetos preexistentes» a «afirmaciones que definen implícitamente objetos» (lo que se denomina habitualmente definiciones estipulativas), por lo menos a la vista de lo que dice en las páginas 73-74, y aunque por otro lado y en el fondo esté apuntando a la misma idea que Mosterín.

## **Parte II** – *Cálculos*

- **Semana 6** (1 de abril) – *Capítulo 2.1*

**11.** ***Haga una breve semblanza (1000 palabras) de David Hilbert apoyándose en materiales que encuentre en la red —e incluya la referencia—.***

David Hilbert nació el 23 de enero de 1862 en Königsberg (actual Kaliningrado, Rusia), en Prusia Oriental, ciudad conocida por haber acogido las ideas de Kant y protagonizar el famoso problema de los siete puentes que había inspirado en 1736 el nacimiento de la teoría de grafos por Leonard Euler. Tras graduarse en el liceo, se matriculó en la universidad de la misma ciudad, donde se doctoró en 1885 con su tesis *Sobre las propiedades invariantes de formas binarias especiales, en particular las funciones circulares.*

Königsberg fue la ciudad natal de Hilbert, así como su hogar, durante los 33 primeros años de su vida. Tras doctorarse, permaneció como profesor allí hasta 1895, un período en el que profundizó en su teoría de las formas y los invariantes algebraicos, tomando un enfoque radicalmente distinto al que existía hasta entonces en la materia. Influido por las modernas ideas de Dedekind y Cantor, Hilbert apostó por las demostraciones conjuntistas y los teoremas de existencia frente a las tediosas construcciones y los interminables cálculos de la teoría hasta entonces existente. Demostró así la existencia de un conjunto finito de generadores para los invariantes cuánticos de cualquier número de variables. Al enviar los resultados a los *Mathematische Annalen*, Paul Gordan dijo del trabajo de Hilbert que era «teología, ¡no matemática!». Afortunadamente, Felix Klein reconoció la elegancia de Hilbert y permitió su publicación.

Junto con Hermann Minkowski —a quien había conocido en Königsberg durante su doctorado—, Felix Klein fue uno de los nombres más importantes de su carrera. Gracias su intervención, en 1895 obtiene una cátedra en la universidad de Gotinga que, junto a la Universidad de Berlín, era el núcleo de la investigación matemática europea de la época.

En Gotinga, desarrolla hasta 1899 múltiples aportaciones a la teoría algebraica de números. Entre 1899 y 1903 se dedica enteramente a los fundamentaos de la geometría, dando una axiomatización completa de la geometría euclidiana, que sería el germen de su interés por el método axiomático. Su enfoque cambió radicalmente la tradición axiomática en la matemática, mostrando que un mismo conjunto de axiomas podía admitir múltiples interpretaciones dependiendo del conjunto de objetos sobre el que se aplicara.

David Hilbert fue posiblemente el último gran matemático de formación generalista; el último gran matemático universal. Su polifacética formación lo llevó a presentar trabajos en áreas muy diversas, incluida la física teórica. La matemática desarrollada por Hilbert sirvió como herramienta para gran parte de la física moderna y, en particular, sus conversaciones con Albert Einstein inspiraron el trabajo de este sobre las ecuaciones de campo.

Su variada formación le llevó a ser la voz de la comunidad matemática de la época y marcar el rumbo que debía llevar la ciencia del momento. En 1900 tiene lugar su famosa conferencia durante el Congreso Internacional de Matemáticos de París, en la que presenta su influyente lista con los 23 problemas que, en su opinión, debían marcar el discurrir matemático en las siguientes décadas. Entre ellas se encontraba el problema del continuo de Cantor o un intento de axiomatización de la física, entre otros.

La ambiciosa lista de Hilbert pone de relieve su eminente talante positivista. Firme defensor de que la matemática debía constituir un edificio sólido e inexpugnable, a partir de 1918 se vuelca de lleno en demostrar la consistencia de sus fundamentos para «eliminar definitivamente del mundo la cuestión de los fundamentos de las matemáticas». Propone, en este contexto, su conocido programa, con el que pretendía demostrar la consistencia axiomática de la aritmética, sobre la que había relegado la consistencia de su geometría o su construcción de la teoría de los números reales.

El punto álgido de su talante positivista lo alcanza con el problema de la decisión, el *Entscheidungsproblem*, que se preguntaba por la posibilidad de dar con un método puramente mecánico capaz de determinar la veracidad o falsedad de cualquier proposición matemática.

El optimismo de Hilbert se topó, desafortunadamente, con los límites de la matemática formal. Los resultados de Gödel y Turing demostrarían que el formalismo tenía límites y que, a diferencia de lo que creía Hilbert, no todo problema tiene solución.

Con todo, su optimismo y prolífica actividad científica contribuyeron a abrir nuevos marcos de investigación insospechados en la época y aún activos a día de hoy. Hermann Weyl, uno de sus discípulos y posteriores detractores, diría de él que «tenía su propia y libre manera de aprender y enseñar [...] a través de conversaciones [...] en largas caminatas a través de los bosques que rodean Göttingen, o, en los días lluviosos, como peripatéticos, en el paseo cubierto de su jardín. Su optimismo, su pasión espiritual y su fe inquebrantable en el valor de la ciencia eran irresistiblemente contagiosos».

Desafortunadamente, las circunstancias históricas empañaron su optimismo en sus últimos años. La influencia nazi en la Universidad de Gotinga, que depuró a todos los docentes de origen judío, debilitó la actividad intelectual de la universidad, hasta el punto de que, en 1934, al ser preguntado por el nuevo ministro de Educación, Bernhard Rust, cómo iba la matemática en Göttingen «ahora que ha sido liberada de la influencia judía», Hilbert respondió: «¿La matemática en Göttingen? Ya no queda nada de eso».

David Hilbert murió el 14 de febrero de 1943, aunque, tras el proceso de purga llevado a cabo por los nazis, tan solo una docena de personas acudió a su funeral, entre los que apenas había un par de académicos. En su tumba aún puede leerse su famosa máxima, tallada a modo de epitafio: «Debemos saber; sabremos».

REFERENCIAS:


- Artículo de Wikipedia de *David Hilbert*, consultado el 30 de marzo de 2019
- Biografía de David Hilbert por José Ferreirós, disponible en la red
- BOMBAL GORDÓN, Fernando (2018) *David Hilbert y la defensa del rigor matemático*, publicado en *El País*
- HODGES, Andrew (1983) *Alan Turing: The Enigma*, cap 2: *The Spirit of Truth*

- Du Sautoy, Marcus (2003) *La música de los números primos*, cap 5: *La carrera de relevos matemática: comienza la revolución riemaniana*
- Torretti, Roberto (1998) *El paraíso de Cantor: la tradición conjuntista en la filosofía matemática*, cap. 2.1: *El programa de Hilbert*

### 12. *Explique los conceptos de «consistencia», «punto de vista finito» y «razonamiento sustantivo» en el programa de Hilbert.*

En 1899, David Hilbert había publicado su exitosa axiomatización de la geometría euclidiana, dando una nueva interpretación al método axiomático heredado de Aristóteles y Euclides. Existía, sin embargo, un problema central en la utilización del método axiomático: ¿cómo saber que, dados esos axiomas, no sería posible demostrar a partir de ellos una proposición y, al mismo tiempo, su contraria?

Hilbert busca que, dado su conjunto de axiomas y reglas de inferencia, ese sistema formal esté «libre de contradicción»; que sea *consistente*. Es decir, que, si una proposición es cierta y demostrable en el sistema, su negación no podrá ser demostrable; que, si se demuestra el teorema de Pitágoras, tengamos la certeza de que nadie podrá jamás con esos axiomas demostrar su negación, por ejemplo. De lo contrario, se producirían contradicciones y el sistema se volvería *inconsistente* (esto derrumbaría el proyecto axiomático, pues de una contradicción puede demostrarse cualquier cosa).

La demostración de la consistencia era fundamental para el llamado «programa de Hilbert»: su geometría se sustentaba en la idea de que los números reales eran consistentes, lo que, a su vez, dependía de la consistencia de la aritmética. Dar con la demostración directa de la consistencia de la aritmética era por tanto esencial para zanjar la cuestión de los fundamentos de la matemática.

Para llevar a cabo esta demostración, Hilbert proponía adoptar un «punto de vista finito», esto es, determinar un conjunto finito de símbolos y axiomas que constituyesen el sistema formal sobre el que se escribirían los enunciados matemáticos. Al reducir la matemática a una mera manipulación finita de símbolos, Hilbert conseguía que su deseada demostración de consistencia fuese irrefutable incluso por los intuicionistas, para quienes solo lo finito y lo construible era realmente cierto.

Al reducir el discurrir matemático a la manipulación de símbolos se hace innecesario pensar sobre lo que se está demostrando. Es decir, se elimina el «pensamiento sustantivo» de la matemática: el discurrir sobre los objetos con los que se trabaja queda relegado a un plano superior, metamatemático, al que Hilbert se refiere como la teoría de la prueba, que, en palabras de von Neumann, «debe a su vez edificar la matemática sobre una base intuicionista».

- ***Comentario del profesor David Teira*** (2 de abril)

Diría que esta semana las preguntas eran fáciles. Lo cual no debe, sin embargo, desmerecer su importancia pues el programa de Hilbert, su auge y caída, vertebra de algún modo lo que nos queda del libro de Torretti.

Algunos de vosotros habéis incluido el epitafio de Hilbert en vuestra respuesta («wir müssen wissen, wir werden wissen»: «debemos conocer, conoceremos»), pero muy pocos lo habéis explicado.

E. Du Bois-Reymond fue un científico que pronunció a mediados del XIX unas famosas conferencias sobre los límites de nuestro conocimiento de la naturaleza. Asumiendo una perspectiva naturalista, se planteaba si la ciencia podía llegar a agotar nuestro conocimiento de la realidad. Y sostenía que sí: por ejemplo, a propósito del problema mente-cuerpo. Hilbert sostuvo, en cambio, que en matemáticas no cabía un *ignorabimus* y de ahí la ambición tanto de su famosa lista de problemas como de su programa metamatemático. De ahí también, como veremos, el golpe que supuso el resultado de Gödel para este ideal de certidumbre matemática.

De entre vuestras respuestas a la segunda pregunta, os copio aquí la de un alumno del curso pasado que capta el espíritu filosófico del programa de Hilbert.

> *El programa de Hilbert pretendía dar una solución a la crisis de los fundamentos de las matemáticas producida por las paradojas de los enfoques conjuntistas, mediante su axiomatización y su formalización simbólica. Los objetos matemáticos, y concretamente los conjuntos numéricos infinitos como los números reales, que sirven de base de toda la matemática, quedarían definidos por el cumplimiento de un sistema de axiomas, haciendo abstracción de cualquier significado o referencia a objetos ideales, que tenían en la concepción original de Cantor. Por otro lado, las proposiciones sobre conjuntos se expresarían en el lenguaje lógico formalizado desarrollado por Frege, Russell y Whitehead, y su prueba consistiría en su derivación de los axiomas mediante unas reglas de manipulación de símbolos. El objetivo era independizar las matemáticas del pensamiento humano, objetivándolas en un juego de signos que se operan mecánicamente, y que supuestamente estaría libre de paradojas y críticas por tratarse de un sistema finito de signos y operaciones. Todo lo que restaría por hacer es probar que el sistema es consistente, es decir, que es imposible deducir del mismo proposiciones contradictorias. Esto sería suficiente para fundamentar las matemáticas, ya que para Hilbert un objeto matemático, por ejemplo, un conjunto infinito, existe si se puede modelizar en un sistema de axiomas sin contradicciones. Los intuicionistas no estarán de acuerdo en que la consistencia es lo mismo que la existencia, pero aquí hay ya una discrepancia filosófica básica que probablemente no se puede resolver sin salir del terreno de la matemática. El programa de Hilbert suponía dividir las matemáticas en dos niveles, la matemática formalizada ya mencionada, y una metamatemática o teoría de la prueba, encargada de demostrar la consistencia de la primera. En los sistemas axiomáticos el pensamiento se elimina, sustituido por un tipo de inferencia formal, pero en la metamatemática permanece el razonamiento matemático intuitivo tradicional, que Hilbert llama razonamiento sustantivo, ya que tiene sustancia o contenido, semántico y cognitivo, por contraposición al razonamiento formal. El programa no tendría sentido si en este nivel se reproducen las paradojas y dudas surgidas por una forma de pensamiento intuitiva, y para evitar las cuales se ha procedido a la formalización de la matemática clásica, por ello Hilbert prescribe para la teoría de la prueba adoptar un punto de vista finito. La postura finita significa limitarse a usar conjuntos finitos, o a lo sumo infinitos potenciales, y demostraciones constructivas, es decir, únicamente métodos*

*aceptables para los críticos intuicionistas, de modo que la metamatemática supuestamente estaría libre de sospechas de inconsistencia, a pesar de usar un razonamiento sustantivo.*

Es decir, hemos pasado del platonismo cantoriano, en el que los transfinitos existen ante los ojos de Dios a un criterio de existencia matemática puramente formal (la consistencia) basado en una concepción de la demostración matemática potencialmente universal (finitismo). Desde estas bases pretendía Hilbert que progresase el conocimiento matemático sin *ignorabimus*. Si tenéis curiosidad por profundizar algo más en estas ideas, no dejéis de visitar el artículo de la *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Veremos el destino de su programa en las semanas siguientes.

➢ **<u>Semana 7</u>** (8 de abril) – *Capítulos 2.2-2.4*

**13. *Explique cuál era el proyecto de Gottlob Frege y en qué sentido su definición de número introdujo una contradicción que lo arruinaría.***

En 1889, Giuseppe Peano publicaría su *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, en el que figuran los cinco axiomas mediante los que hoy construimos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Asimismo, en 1888 Dedekind había ya presentado su propia fundamentación de la aritmética, precisando que «el concepto de número es enteramente independiente de las representaciones del espacio y del tiempo» y concluyendo que «es un producto inmediato de las leyes del pensamiento». Sin embargo, en sus desarrollos no parece haber rastro de un intento de fundamentación anterior: el de Gottlob Frege en 1884, construido a partir de su escritura conceptual, propuesta poco antes.

La definición de número elaborada por Frege es la siguiente. Tomando prestada la noción de Cantor de equipotencia o equinumerosidad entre dos conjuntos (pueden o no ponerse en correspondencia biunívoca), Frege dice que dos conjuntos *tienen el mismo número* si son equinumerosos, y que *no tienen el mismo número* en caso contrario. Naturalmente, la relación «tener el mismo número» constituye una relación de equivalencia que, por tanto, genera clases de equivalencia. Esas clases de equivalencia son para Frege el concepto de número: el número $n$ es el conjunto (la clase de equivalencia) de todos los conjuntos de $n$ elementos (equipotentes entre sí).

La definición de Frege, a simple vista elegante y sencilla, le permitía cumplir uno de sus principales objetivos: caracterizaba simultáneamente el concepto de número como adjetivo y como sustantivo. Por un lado, tenía sentido decir que un conjunto *tiene un cierto número* (como atributo), pues podía comprobarse su pertenencia a la clase de equivalencia en cuestión. Por otro lado, la clase de equivalencia en sí (el conjunto de todos los conjuntos equipotentes entre sí) constituía el objeto de número en sí mismo, como sustantivo, y este era único.

Precisamente, el planteamiento de Frege lograba caracterizar el concepto de número de forma única y es justamente esa noción de unicidad la que arruina su teoría. A diferencia del de Frege, el resto de los programas de fundamentación de la aritmética adopta un enfoque estructuralista de la matemática, según el cual, y parafraseando a Torretti, «una teoría matemática se interesa por sus objetos sólo en cuanto mantienen ciertas relaciones mutuas, y no en cuanto a lo que cada uno pudiera ser de suyo». Así ocurre con la construcción de los naturales con los axiomas de Peano y así lo hace notar Russell justo al comienzo de su *Introducción a la filosofía matemática*: el conjunto $\{0,1,2,3,\dots\}$ es una representación tan válida de los números naturales como el conjunto $\{100,200,300,\dots\}$ en cuanto que ambos cumplen los axiomas de Peano.

Pese a conocer las corrientes estructuralistas —e incluso haber trabajado sobre ellas—, Frege se cierra en banda y se obceca con la idea de unicidad en la definición de número que termina por arruinar su teoría. Como es evidente, una construcción de la forma «el conjunto de todos los conjuntos que…» permite plantear la cuestión de si el conjunto está contenido en sí mismo, lo que conduce inevitablemente a la paradoja de Russell, volviendo inservible el planteamiento de Frege.

14. ***Explique las paradojas de Cantor y Burali-Forti y en qué sentido afectaban al concepto cantoriano de transfinito. Explique también en qué sentido la teoría russelliana de los tipos proporcionaba una solución y a qué coste.***

La paradoja de Cantor se deriva del teorema de Cantor: *el cardinal de un conjunto es siempre menor que el cardinal de su conjunto potencia.* Consideremos ahora un conjunto universal $E$ que contenga a todos los conjuntos. Parece evidente que, al contener a cualquier otro conjunto, $E$ ha de tener un cardinal mayor que cualquier otro, lo que es imposible por el teorema de Cantor: ha de cumplirse $|E| < |\mathcal{P}(E)|$; el conjunto de todos los conjuntos tiene una cardinalidad menor que la de su conjunto potencia.

La paradoja de Burali-Forti, citada en respuestas anteriores, parte de que el conjunto $\Omega$ de los ordinales transfinitos está bien ordenado y, por tanto, ha de tener asociado un ordinal $\zeta$. Naturalmente, $\zeta$ sería posterior a todos los ordinales (a todos los elementos de $\Omega$). Sin embargo, $\zeta$ es un ordinal, de modo que ha de cumplirse $\zeta \in \Omega$. De ello se deduciría que $\zeta < \zeta$, que evidencia la paradoja.

A diferencias de otras de las «antinomias russellianas» (la paradoja de Russell, la paradoja de Richard, la paradoja del mentiroso...), las dos contradicciones citadas aquí (la de Cantor y la de Burali-Forti) dependen enteramente de la noción de orden y de conjunto. Por tanto, es fácil ver que su aparición amenaza con dinamitar el programa del transfinito de Cantor, quien, para poder asignar ordinales y cardinales a todos los conjuntos que pudieran presentarse, necesitaba el principio del buen orden y la noción de conjunto que, como parecen sugerir estas paradojas, generan contradicciones.

Ya vimos en otras respuestas que las paradojas no le preocupan demasiado a Cantor pues, a su modo ver, estas surgen al considerar que toda pluralidad bien definida es un conjunto, lo que no siempre es cierto. Así las cosas, cuando Bertrand Russell se da de bruces con el problema, opta en primer lugar por adoptar el mismo parecer que Cantor: «con solo negarlo [que no toda clase-pluralidad es una clase-objeto] se superará toda dificultad».

Con el tiempo, el parecer de Russell cambia y esta manera de despachar el problema deja de satisfacerlo. Pronto se da cuenta de que cae, al igual que Cantor, en la incapacidad de determinar con certeza cuándo una función proposicional determina una clase (en el vocabulario cantoriano, cuándo una pluralidad bien definida determina un conjunto). Así las cosas, publica junto a Whitehead el famoso *Principia Mathematica*, en el que expone su *teoría de los tipos lógicos.*

La teoría de los tipos lógicos se sustenta sobre el concepto de *ámbito.* Suponiendo que trabajamos con una función proposicional $\varphi(x)$, Russell apunta que existen dos *ámbitos* relacionados con $\varphi$. Por un lado, el *ámbito de verdad*, esto es, el conjunto de valores de $x$ que hacen cierto el predicado. Por otro lado, distingue el *ámbito de significación*: el conjunto de todos los valores de $x$ sobre los que $\varphi$ puede ser evaluada, independientemente de si el resultado es verdadero o falso. Así las cosas, se hace evidente que, en general, el ámbito de significación de las entradas y el ámbito de significación de las salidas de la fórmula $\varphi$ no tienen por qué ser —y en general no son— el mismo. Así, la clase $\{x : \varphi(x)\}$ no puede usarse como argumento de la fórmula $\varphi$; no tiene sentido preguntar por $\varphi(\{x : \varphi(x)\})$. A la teoría de los tipos lógicos que, tomando en consideración estas cuestiones, evita las paradojas se le conoce como la *teoría simple de los tipos.* Russell y Whitehead desarrollan posteriormente una versión más compleja, capaz de resolver otras cuestiones pendientes (la circularidad viciosa de las funciones impredicativas), a la que llaman *teoría ramificada de los tipos lógicos.*

Se hace claro que, tomando las precauciones de Russell y Whitehead, es fácil deshacerse de las paradojas que habían ido presentándose, pero ¿a qué coste? Pese a que la teoría surge motivada por el deseo logicista de derivar todas las proposiciones de la matemática a partir de un puñado de conceptos fundamentales, su creciente complejidad se aleja por completo de este objetivo. Además, algunos aspectos de la teoría russelliana hacen que grandes porciones del cuerpo de conocimientos de la matemática clásica no se sostengan sobre los nuevos fundamentos (el análisis, por ejemplo), de modo que, para muchos, abrazar la postura logicista significaba renunciar a importantes resultados, teoremas y conceptos matemáticos dados por buenos durante décadas y siglos. Pese a los intentos de Russell y Whitehead por salvar el grueso de la matemática apelando a dudosos axiomas y principios fundamentales, su teoría suponía para algunos un coste demasiado alto para fundamentar la matemática.

➢ ***Comentario del profesor David Teira*** (10 de abril)

Con esta respuesta ya me pongo al día. Atravesamos el ecuador del curso y vuestro rendimiento es muy bueno. [Algunas disquisiciones:]

- Hasta ahora veíamos distintas posiciones respecto a la existencia de objetos matemáticos: Cantor asumía la existencia de los transfinitos «ante los ojos de Dios»; Hilbert definía la existencia como no contradicción conceptual. Cantor adoptaba un criterio de existencia extensional: los conjuntos se pueden definir señalando sus miembros («este, ese, aquel...»). Hilbert optaba por uno intensional: sabemos que algo existe a partir del análisis de su definición, aun cuando no podamos señalarlo (tal como ocurría con los objetos denotados por el axioma de elección). Frege fusiona explícitamente ambas posturas, privilegiando la intensional: define los conjuntos como conceptos dotados de referencia. Como habéis visto con el caso de los números, Frege los define intensionalmente a partir de la correspondencia entre conjuntos, desde el supuesto de que refieren extensionalmente a un solo objeto. Un único objeto corresponde a todos los conceptos que se aplican a él.
- Frege introduce estas distinciones dentro de un proyecto más ambicioso de fundamentación de la matemática a partir de la lógica. La lógica sería para Frege un lenguaje formal, pero, a diferencia de la tradición aristotélica, en este lenguaje las proposiciones no se analizarían según la distinción gramatical entre sujeto y predicado, sino en términos matemáticos: función y variable. Como algunos de vosotros habéis apuntado, se trata de evitar las ambigüedades del lenguaje natural al formular los conceptos fundacionales en matemática (número, conjunto...)
- Pero las paradojas que surgieron de este proyecto supusieron, en última instancia, la separación de lógica y matemáticas: los conjuntos no podrían definirse como conceptos sin incurrir en ellas. La teoría de los tipos de Russell mostró los costes de adoptar un punto de vista intensional riguroso (los objetos se multiplicaban, uno por tipo).

- Algunos de vosotros os habéis hecho eco de las críticas de Torretti a Frege: no dejéis de leer la reseña que Ferreirós hace del libro de Torretti para apreciar el sentido de estas objeciones. Está en el foro de recursos.
- Un detalle que he visto en un par de respuestas: Torretti habla de que Dedekind adopta el enfoque estructural, pero lo dice de un modo que induce a confusión. El estructuralismo matemático es obra muy posterior de los Bourbaki (si no conocéis la historia de este pseudónimo, es entretenida y se cuenta aquí). Se puede discutir hasta qué punto Dedekind era estructuralista *avant la lettre*, pero ni Frege ni ningún otro de sus contemporáneos se pudieron resistir a ese punto de vista, pues no estaba formulado como tal.

- **<u>Semana 8</u>** (23 de abril) – *Capítulos 2.5-2.7*

**15. *¿Por qué el concepto de «aseveración funcional» y el «modo recursivo» de pensar defendidos por Thoralf Skolem permitirían una fundamentación hilbertiana de la aritmética?***

La fundamentación de la aritmética defendida por Thoralf Skolem en su obra de 1923 *La fundamentación de la aritmética mediante el modo recursivo de pensar* se conoce con el apelativo de «primitivo-recursiva» y presenta un enfoque eminentemente finitista.

Durante su estudio del *Principa Mathematica*, Skolem consideró que había grandes dominios de la matemática que podían fundamentarse de sin recurrir a cuantificaciones universales o existenciales sobre dominios infinitos. Naturalmente, una fundamentación de este tipo se deja muchas cosas fuera, pero, en lo que logra fundamentar, elude el peligro de las paradojas causadas por la inclusión del infinito en la lógica y la teoría de conjuntos.

Así las cosas, Skolem propone una fundamentación de la aritmética sustentada sobre dos conceptos clave. En primer lugar, el de «aseveración funcional», heredado de Russell y Whitehead, que «consistirá en afirmar una proposición como válida en un caso que se deja indeterminado». En definitiva, la aseveración funcional es, en esencia, una función proposicional que expresa relaciones aritméticas. En segundo lugar, para demostrar los teoremas de la aritmética (en otras palabras, para demostrar la validez de las aseveraciones funcionales propuestas), Skolem apela al «modo recursivo de pensar», que no es otra cosa que la inducción sobre los naturales.

De este modo, cualquier aseveración funcional puede probarse válida en un argumento concreto sin más que recurrir a una cantidad finita de aplicaciones del *modus ponens*. Esto confiere al programa de Skolem una naturaleza claramente finitista que encaja con el enfoque hilbertiano y su programa de fundamentos. Al fin y al cabo, la teoría de la prueba de Hilbert, situada en el nivel metamatemático, habría de demostrar la consistencia de los sistemas formales usando un enfoque finitista: demostraciones que pudiesen ser comprobadas en una cantidad finita de pasos sobre una cantidad finita de símbolos. Es claro que el planteamiento de Skolem, aun con sus contrapartidas de alcance, encaja en el programa de Hilbert.

**16. *¿En qué consiste el «problema de la decisión»? ¿En qué sentido lo resuelve Emil Post para el cálculo proposicional?***

Como ya sabemos —y citando a Torretti—, «el programa de Hilbert busca vindicar la matemática clásica con métodos finitistas o “intuicionistas” a través de su formulación en una escritura conceptual o cálculo lógico». Ante un cálculo lógico dado, resulta esencial contar con un algoritmo o procedimiento puramente mecánico que permita determinar si un símbolo pertenece o no al sistema, si una cadena de símbolos es una fórmula sintácticamente válida o incluso si una cadena correctamente construida conforma una prueba en el sistema formal en cuestión.

El primer caso (determinar si un símbolo pertenece al sistema) se resuelve trivialmente comparando uno a uno el símbolo dado con cada uno de los símbolos del sistema, que conforman un conjunto finito; para comprobar si una determinada cadena de longitud $\ell$ es o no válida en el sistema basta comprobar si coincide con alguna de las posibles combinaciones de símbolos válidas de longitud $\ell$ (esto es computacionalmente más costoso, pero igualmente computable). Por supuesto, estos son métodos evidentemente finitistas, pues se llevan a cabo en un número finito de pasos.

Ahora bien, Hilbert está preocupado por demostrar la consistencia de un sistema formal (concretamente la consistencia de sistemas formales en los que la validez sintáctica coincide con la validez semántica), para lo que propone demostrar que una determinada fórmula, claramente contradictoria, no tiene demostración en el sistema; no existe una cadena de símbolos válida que sea demostración de esa proposición. Siguiendo lo expuesto arriba, es fácil ver si una determinada cadena de símbolos demuestra o no la fórmula en cuestión, pero no es igualmente sencillo, dada la fórmula, decidir si existe una demostración en el sistema. Hilbert apunta a que esta cuestión de consistencia quedaría inmediatamente resuelta por medio de un algoritmo que decidiese, ante una fórmula cualquiera, si es o no deducible de los axiomas. Naturalmente, ante una fórmula contradictoria, el algoritmo diría que no hay demostración y ello confirmaría la consistencia del sistema.

A la cuestión de determinar si existe un algoritmo capaz de aseverar la validez de cualquier fórmula se le conoce como el *Entscheidungsproblem* o «problema de la decisión», y aunque el propio Hilbert casi daba por descontado que no podía existir un método tan general que funcionase para todas las fórmulas, para matemáticos como Jacques Herbrand el problema de la decisión era «en cierto modo, el problema más general de las matemáticas» y, por extensión, una cuestión central en el programa de Hilbert.

En 1921, Emil Post presenta su tesis doctoral, *Introducción a una teoría general de las proposiciones elementales*, en la que plantea y resuelve el problema de la decisión con respecto a un subsistema del sistema deductivo planteado en el *Principia Mathematica*. En otras palabras, si el sistema del *Principia Mathematica* es equivalente al cálculo predicativo de primer orden, Post trabaja con un subconjunto de este: la lógica proposicional, donde los predicados son de aridad nula. Post adopta un enfoque puramente sintáctico y se enfrenta al problema mediante una representación algebraica de las fórmulas que le permite dar una demostración constructiva de su teorema fundamental, que da condiciones necesarias y suficientes para que una fórmula sea deducible de los axiomas. Al ser constructiva, su demostración es al mismo tiempo «un método para escribir inmediatamente una derivación formal de su aseveración basada en los postulados», lo que constituye el algoritmo que se buscaba, resolviendo así el problema de la decisión para el caso particular del cálculo proposicional.

En los próximos años, Post se enfrentaría al caso general de atacar el problema de la decisión para el cálculo predicativo de primer orden (el sistema descrito en el *Principia Mathematica* al completo). Sin embargo, hacia 1924 se convenció de que la solución había de ser negativa, como después demostrarían Church, Gödel o Turing.

- ***Comentario del profesor David Teira*** (24 de abril)

Se me ocurre esta semana ahondar un poco en cómo Skolem contribuye al programa de Hilbert, para lo cual vuelvo a recurrir a los trabajos de Pepe Ferreirós (*Labyrinth of Thought*, pág. 360). La intuición (anti-hilbertiana) subyacente a los primeros trabajos de Skolem es que la axiomatización no podía ser el fundamento último de la matemática. Para sustanciar esta crítica, Skolem desarrolla nociones (como las de *aseveración funcional*, etc.) que contribuyen al desarrollo del programa de Hilbert, pero, en última instancia, ponen de manifiesto sus limitaciones. Veámoslo brevemente.

El primer paso de la crítica de Skolem pasa por dar una definición de lo que es axiomatizar: axiomatizar la teoría de conjuntos supone *construir una formalización de primer orden*, es decir, con cuantificadores sobre objetos individuales (los números). Sobre estos objetos sabemos solamente lo enunciado en los axiomas, cosa que intuitivamente se cumple con los números —somos capaces de interpretar los axiomas mediante ejemplos numéricos—. Si cuantificamos sobre predicados en vez de sobre individuos, no dispondremos ya de tales intuiciones: si los predicados son conjuntos y subconjuntos, no tenemos una definición extensional intuitiva de predicados como «todos los subconjuntos de un dominio».

Supuesta esta concepción de la axiomática (a la que se refería la pregunta, en lo que tiene de refinamiento de la posición de Hilbert), la oposición de Skolem radicaba en que, para él, los matemáticos no entendían la teoría de conjuntos en términos axiomáticos, sino que tomaban los conjuntos como especificaciones de colecciones arbitrarias. Y al axiomatizar la teoría de conjuntos sucede que los conceptos básicos de esta última (como el de pertenencia) dejan de tener su sentido intuitivo: se podrán interpretar de tantas maneras como el sistema de axiomas.

Pues bien, estas interpretaciones violan nuestro sentido intuitivo de las mismas, contra las pretensiones fundacionalistas de Hilbert. El problema que plantea el teorema de Löwenheim-Skolem es que nociones como las de cardinalidad dejan de tener un sentido obvio. Por ejemplo, se puede interpretar un sistema de axiomas como el de los *Principia* de tal modo que obtenemos un modelo denumerable en el que, sin embargo, es posible probar que hay un conjunto indenumerable. Sin contradicción. Torretti, lamentablemente, no aborda el teorema de Löwenheim-Skolem en su libro, pero podéis ver una presentación sencilla en la propia Wikipedia.

En otras palabras, una definición axiomática no nos permite formular un concepto absoluto de cardinalidad: a partir de una teoría axiomática de primer orden, podemos obtener modelos con una cardinalidad distinta a la del original.

Para Skolem, semejante resultado pone de manifiesto la insuficiencia del método axiomático para la empresa de fundamentación, si es que esta tiene por propósito aclarar nuestras intuiciones matemáticas fundamentales.Espero que esta breve nota os pueda situar algo mejor la posición de Skolem, aunque no era este el sentido de las preguntas, que, por lo demás, están muy bien respondidas una semana más.

- **<u>Semana 9</u>** (29 de abril) – *Capítulos 2.8-2.9*

**17.** ***¿De qué modo prueba Gödel que el cálculo predicativo de primer orden es completo? ¿Por qué la prueba no es constructiva?***

En julio de 1939, Kurt Gödel presenta su tesis doctoral, cuyos principales resultados se resumirían un año después en un artículo más escueto para los *Mathematische Annalen*, la revista de Hilbert en la época. La tesis de Gödel está dedicada por entero a demostrar la completitud del cálculo predicativo de primer orden. Es importante matizar a qué se refiere Gödel en este punto por *sistema completo*, pues su resultado más conocido, publicado en 1936, es justamente el teorema de incompletitud. A este respecto, es importante distinguir la verdad lógica de la verdad simbólica; la validez sintáctica, relacionada con la deducibilidad, de la validez semántica, lo lógicamente verdadero. En esencia, lo válido sintácticamente es aquello que, dentro del sistema formal, está bien expresado, aunque dicha fórmula no exprese una verdad de la lógica (estas sí, semánticamente válidas).

En su tesis, Gödel parte del sistema deductivo de los *Principia Mathematica* con las restricciones que lo limitan a un cálculo predicativo de primer orden. Su cometido será demostrar que todas las verdades lógicas pueden deducirse de la lógica de primer orden sin necesidad de añadir nuevas reglas de inferencia. Así las cosas, su trabajo logra demostrar que todo aquello que es deducible, esto es, sintácticamente válido a partir de las reglas de inferencia, es precisamente todo lo verdadero.

Su teorema final establece que un conjunto infinito de fórmulas del sistema predicativo de primer orden este es *realizable* (admite un modelo) si y solo si cada subconjunto finito del mismo es realizable. De este teorema se extrae como corolario que, dada una teoría con un número finito o infinito numerable de axiomas sobre el cálculo predicativo de primer orden, o bien la teoría en inconsistente y, por consiguiente, cualquier cosa es deducible (también todo lo verdadero), o bien hay un modelo de la teoría.

Si bien el teorema de completitud de Gödel identifica lo verdadero con lo deducible, un importante logro dentro del programa de Hilbert, su demostración no es constructiva, lo que no termina de encajar dentro de la teoría de la prueba, aunque a Gödel esto no lo preocupa demasiado en el momento.

**18.** ***¿Qué es para Hilbert la teoría de la prueba? ¿En qué sentido el procedimiento de gödelización utilizado en la prueba de los teoremas de incompletitud ejemplifica esta teoría hilbertiana?***

Como se ha venido comentando en respuestas anteriores, el programa de Hilbert era tajante en cuanto a la llamada «postura finitista». Puesto que, en general, la inducción transfinita y la extensión del *tertium non datur* a dominios infinitos no estaba justificada, Hilbert había propuesto salvar estas técnicas demostrando su validez en un nivel superior: la metamatemática. Es en ese último nivel donde se encuentra la llamada teoría de la prueba.

La teoría de la prueba se encarga de analizar las demostraciones sobre la propia consistencia de la matemática usando métodos finitos, que no usasen el principio del tercio excluso en dominios infinitos, para lo que, en palabras del propio Torretti, «el programa de Hilbert propone, pues, probar la consistencia del sistema formal de la matemática clásica con medios finitos razonando sustantivamente sobre sus enunciados y derivaciones, considerados como combinaciones de signos sin sentido». En cierto modo, Hilbert comparaba su teoría de la prueba como un proceso en el que, mediante la axiomatización y la formalización, la matemática en conjunto pasaba a formalizarse del mismo modo que en el análisis la fundamentación del límite había pasado de la intuición de los infinitesimales de Newton, Leibniz y Cauchy a la «epsilóntica» de Weierstrass y Bolzano, que lograban encapsular la idea de límite en el dominio de lo finito.

Si bien el teorema de completitud de Gödel presentado en su tesis estaba guiado por una demostración no constructiva, que no encajaba con el enfoque finitista de la metamatemática hilbertiana, su resultado más conocido, los teoremas de completitud, cambiarían de enfoque. Estos se demuestran pasando por un primer proceso llamado «gödelización», por el que el sistema formal queda reducido a la misma aritmética. Gödel propone una codificación de las fórmulas basada en números obtenidos como potencias de números primos asociados a los símbolos, de modo que cada fórmula se corresponde de forma unívoca con un número natural. Esto permite operar con las formulas de forma finita, igual que se opera con los números en la aritmética, así como identificar una fórmula de forma inequívoca y pensar en una una demostración del mismo modo, pues es una cadena de fórmulas. El proceso de asignar los números de Gödel a las fórmulas del sistema formal encaja a la perfección en los requisitos de la metamatemática de Hilbert, y justamente por ello, sus descorazonadores resultados serían tan demoledores para su programa.

- ***Comentario del profesor David Teira*** (30 de abril)

Felicitaciones, como de costumbre. El comentario de hoy es una incitación a que veáis la conferencia de Enrique Alonso que tenéis en el curso virtual. Quizá una buena manera de abordar el comentario sea a partir del propio artículo de Alonso y Manzano que sirve de base a la conferencia y que le puedo pasar a quien tenga curiosidad: María Manzano & Enrique Alonso (2014) *Completeness: from Gödel to Henkin*, *History and Philosophy of Logic*, 35:1, 50-75, DOI: 10.1080/01445340.2013.816555.

Es necesario recordar que la distinción entre sintaxis y semántica apenas comienza a formularse con el propio Gödel. Lo que se investiga a la altura de los años 20 es la existencia de algoritmos que puedan decidir si un conjunto de fórmulas es o no suficiente.

En términos semánticos actuales, diríamos que una teoría tiene más de un modelo (o interpretación). Se pudo plantear entonces la cuestión de si una teoría es completa respecto a un modelo o a una clase de modelos, es decir, si el conjunto de teoremas (sintácticamente) demostrables en un sistema lógico incluye el conjunto de verdades (semánticas) de tal sistema. Si la respuesta es afirmativa, diremos que el sistema es (débilmente) completo —existe otro sentido «fuerte» del que no nos ocuparemos aquí—. Según Alonso y Manzano, el programa de investigación consistió en ampliar, por un lado, el conjunto de modelos al máximo y, por otro, minimizar el conjunto de axiomas del que partimos para definir el sistema lógico. En la escuela de Hilbert, el problema de la compleción de un cálculo aparece a principios de los años 1920 (Bernays, Post, Behman) de la siguiente manera:

*If the axiomatization of a non-formal system is not self-evident, as in some sense claimed by Russell, what criteria can be used to establish its adequacy, especially when we have alternative axiomatics? It seems necessary to prove somehow that the theorems derivable from axioms are exactly the formulae needed: no more, no less. The first part of the problem, not to prove more than what is needed, was relatively easy to tackle and led directly to the definition of the* consistency *of a calculus. The property of consistency is defined in terms of the impossibility of proving a formula and its negation, or equivalently, as a guarantee that there is at least one well-formed formula that is not a theorem of the calculus. The counterpart, namely the* sufficiency *of a given calculus, or the sufficiency of any calculus whatsoever, is much more difficult to pin down. What property of formulae is it that allows us to affirm of a given formula that it should be a theorem even before we have an effective proof of it in some suitable calculus?*

En este contexto —tal como explica Torretti (pp. 247 y ss)— aparecen las investigaciones de Post, cuyo teorema fundamental dice que, si una fórmula es *aseverable* en un sistema lógico, será deducible del mismo. No tenemos todavía un concepto de verdad semántica (como el que llegará años después con Tarski): Post propone un procedimiento de decisión para saber si una fórmula es válida (aseverable) mediante lo que hoy llamamos *tablas de verdad* (Torretti, pp. 256-257); y prueba después que, si lo es, será deducible del mismo. Es decir, el problema de si un cálculo es completo depende de si es decididle.

No obstante, esto plantea, según Alonso y Manzano, un dilema para Gödel, pues «either semantics is decidable, in which case the completeness of the logic is trivial, or completeness is a critical property that cannot be obtained as a corollary of a previous decidability result».

Gödel lo resuelve probando que un sistema es completo sin presuponer su decidibilidad. Para ello, Gödel sigue la senda iniciada por Löwenheim-Skolem e introduce el concepto de *realizabilidad*, precursor de nuestro actual concepto de *modelo* (Torretti, pp. 276-ss). Ocurre que, como indica la pregunta que os hacía, Gödel nos ofrece una prueba no constructiva, desviándose del programa de Hilbert. Y poniendo también de manifiesto que los conceptos semánticos no parecen comportarse del mismo modo que los conceptos sintácticos: ya en el año 1930, Gödel indica que el concepto de *válido* se refiere a la totalidad no-denumerable de funciones, mientras que *demostrable* se refiere a la totalidad denumerable de pruebas formales. Mientras que el programa de Hilbert podría ser viable respecto a los conceptos sintácticos, no parece que los semánticos lo admitan del mismo modo.

- **<u>Semana 10</u>** (6 de mayo) – *Capítulos 2.10-2.11*

**19.** ***Explique y comente la siguiente afirmación de Torretti (p. 352): el primer teorema de incompletitud de Gödel «habrá de parecernos mucho más grave si creemos que P y los sistemas afines comprenden todos los recursos de que dispone el hombre para conocer con certeza una verdad sobre números no incluida ya en la aritmética finitista».***

Como se ha repetido en numerosas ocasiones hasta este punto, los teoremas de incompletitud de Gödel vienen a dar al traste con el programa formalista de Hilbert, pero no son necesariamente un problema insalvable para el desarrollo ulterior de la matemática. El título del artículo de Gödel en 1931 ya anuncia que lo que le ocupa son las proposiciones *formalmente* indecidibles del *Principia Mathematica*, de modo que sus teoremas de incompletitud marcan los límites del formalismo, no de la matemática.

Naturalmente, para alguien como David Hilbert, que pretendía reducir la matemática al formalismo y fundamentarla en él, las limitaciones demostradas por Gödel se entienden como limitaciones de la matemática; de ahí que Torretti diga que el primer teorema de incompletitud habrá de parecernos mucho más grave si creemos que el formalismo ($P$ y los sistemas afines) constituye único el recurso de que dispone el hombre para conocer las verdades matemáticas.

Afortunadamente, como el propio Torretti apunta poco antes de esa cita en página 352, lo único que dicen los teoremas de Gödel es que hay ciertas propiedades que no pueden probarse dentro del sistema (pero que podrían probarse por otros medios). Así, tal y como él ilustra, el problema es equivalente a la cuestión de la cuadratura del círculo en el sistema de la regla y el compás (de hecho, si consideramos este como un modelo abstracto de cómputo, la cuadratura del círculo sería el equivalente al problema de parada en las máquinas de Turing), pero ello no significa que no podamos construir un cuadrado con el área de un círculo por medio de otros métodos.

Así las cosas, es para la mentalidad hilbertiana, que identifica matemática con formalismo, para la que los teoremas de Gödel suponen un verdadero varapalo. Para el propio Gödel, por el contrario, no mostraban más que los límites de una manera de hacer y fundamentar las matemáticas.

**20.** ***¿En qué sentido la tesis de Church constituye «una decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad» (p. 376)?***

La cuestión central en torno a la que orbita la tesis de Church puede resumirse en si toda función *calculable* es *computable* (no acabo de compartir la distinción de hace Torretti entre computable y calculable; me parece difusa y tengo la sensación de que una perspectiva más computacional sería más esclarecedora, pero me ceñiré a sus términos). Entendemos por función *computable* aquella que podemos evaluar efectivamente en una cantidad finita de operaciones en un sistema formal o modelo abstracto de cómputo, como pueden ser las máquinas de Turing, el cálculo lambda de Church, un cálculo lógico, etc. Naturalmente, toda función que podamos evaluar usando un algoritmo descrito en uno de estos métodos es computable y, por tanto, calculable. La cuestión es si todo lo calculable mediante algún algoritmo, conocido o no, es computable en uno de estos modelos (o si, por el contrario, las funciones calculables agotan las computables).

La tesis de Church viene a decantarse por el primero de esos supuestos: *toda función calculable es computable*. Entendiendo la tesis de Church en el contexto de las ciencias de la computación, esta viene a dar una definición de lo es que un algoritmo y, por tanto, a asegurar la equivalencia de potencia de cómputo entre todos los modelos de cómputo: el cálculo lambda, las máquinas de Turing, los computadores von Neumann, los computadores cuánticos, etc. son todos equivalentes en cuanto a potencia de cómputo; pueden aceptar la misma clase de lenguajes formales, la misma clase de problemas.

Si bien la tesis de Church puede enunciarse de todas esas formas («todo lo computable es Turing-computable», «todo algoritmo es equivalente a una máquina de Turing»…), el suyo no es un enunciado matemático probado. No puede serlo, pues en cualquier momento podría aparecer un nuevo modelo abstracto de cómputo más potente que la máquina de Turing o la teoría de funciones recursivas de Church, que pudiese calcular funciones incomputables para esos modelos, lo que daría al traste con la definición de algoritmo implica en la tesis de Church. De ahí que Torretti mencione que la tesis no es más que una «decisión», en cierto modo conformista; la «decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad». Cabe la posibilidad de que resulte ser una decisión equivocada, pero puesto que es improbable y no tenemos nada más potente, aceptamos que todo lo efectivamente calculable ha de ser computable por una máquina de Turing, lo que da esa definición implícita de algoritmo. No podemos más que conformarnos con esta potencia y, por tanto, identificar al concepto de algoritmo con aquello que estos sistemas son capaces de hacer.

Adentrándonos en la teoría de la complejidad estructural, existe una versión reforzada de la tesis de Church, conocida como la *tesis de Church extendida*, que asegura que todo lo computable en un determinado modelo es también computable en una máquina de Turing en un algoritmo de la misma complejidad (es decir, que la simulación entre modelos de cómputo de realiza en tiempo polinómico). El modelo de computación cuántica parece ser el único contraejemplo a la tesis de Church extendida, pero no contradice la tesis de Church original, en tanto que puede computar lo mismo que una máquina de Turing o un ordenador convencional.

→ *Comentario particular del profesor David Teira a la respuesta 20*

Gracias por esta estupenda respuesta, Noel. Ten presente que la noción de calculabilidad de Torretti es confusa porque está intentando captar el uso informal que de ella hacían los matemáticos en la aépoca en la que se formuló la tesis de Church. Si adoptas una perspectiva computacional de partida, el problema de aceptar la tesis de Church se disuelve, calculabilidad y computabilidad tendrían el mismo nivel de definición formal. La pregunta entonces es si recogerían todos los usos informales del concepto de algoritmo en matemáticas.

➢ ***Comentario del profesor David Teira*** (8 de mayo)

Una semana más elogios, pues vuestras respuestas son buenas. Eso sí, tengo que poner un reparo y es que vuestros comentarios han sido algo literales, en particular sobre la cuestión 19. Explicáis correctamente el teorema de Gödel, pero no acabáis de dar con el sentido de las palabras de Torretti. Si no lo habéis hecho todavía, os recomiendo que leáis la reseña que hace José Ferreirós del libro de Torretti (en la carpeta de materiales complementarios). Según Ferreirós, Torretti toma partido por la teoría de conjuntos como fundamento de la matemática, criticando a quienes como Frege y Russell pretendieron fundamentar la matemática en la lógica. Mientras que este último proyecto exige basar cualquier verdad aritmética en «$P$ y los sistemas afines», Gödel pone de manifiesto que la verdad matemática no se reduce a deducibilidad en un sistema formal. Las paradojas de la teoría de conjuntos sólo supondrían una crisis de fundamentos si lo que se busca como fundamento es un sistema axiomático consistente. Cantor, en cambio, acepta las paradojas como expresión de la libertad matemática y busca otras formas de lidiar con ellas a través de la propia teoría de conjuntos.

Una forma alternativa de ver este problema de la libertad matemática lo tenéis en la segunda pregunta, sobre la tesis de Church. El programa de Hilbert pretendía dar una definición reductiva de lo que es la matemática a partir de lo que cupiera en un sistema axiomático interpretado conforme a la filosofía hilbertiana. Torretti cuestiona que hayamos de rechazar la teoría cantoriana de conjuntos simplemente porque no quepa en tal sistema de axiomas: aceptar las paradojas es el precio de la libertad matemática. El ya mencionado Ferreirós abandera en nuestros días un giro más radical: las matemáticas han existido históricamente como conjuntos de prácticas, conjuntos de problemas específicos de una disciplina (la aritmética comercial, por ejemplo) con reglas locales para resolverlo, que sólo gradualmente se han ido exportando y generalizando. Pretender reunir todas esas prácticas bajo la arquitectura de un sistema axiomático no hace justicia a lo que de hecho son las matemáticas. La tesis de Church plantea si reducir una definición informal de algoritmo calculable (que funciona en muchos contextos de modo equívoco) a una definición rigurosa desde la teoría de la computabilidad. Es una forma de imperialismo hilbertiano. Y la pregunta es si tiene sentido aceptarla. Podéis ver más sobre este movimiento de las prácticas matemáticas en este enlace.

Por supuesto, estas son disputas filosóficas.

Noel Arteche y Guillermo Villaverde han visto bien las dos posiciones de este problema.

Buen trabajo y ánimo, que con un esfuerzo más termina el curso

→ *Respuestas 19-20 de Guillermo Villaverde*

El teorema VI del famoso artículo de Gödel de 1931 establecía que en todo sistema formal que satisfaga determinadas condiciones formales (relativamente débiles) existen proposiciones indecidibles. Dicho de otro, todo sistema formal con esas características es incompleto en el sentido de Post. Aunque exista la tentación de interpretar en términos absolutos este resultado, como si afirmase que determinado enunciado aritmético no es en sí mismo ni verdadero ni falso, el hecho es que sólo afirma una condición, por así decir, «sintáctica»: la imposibilidad de deducir dentro del sistema tanto ese enunciado como su negación. Y precisamente porque es un resultado sintáctico, firmemente arraigado a las posibilidades expresivas y deductivas de determinados sistemas formales, cabría en principio revertir sus consecuencias desde otros sistemas formales. Como bien señala Torretti, la validez del teorema VI está circunscrita a «determinados recursos», y su demostración por Gödel en 1931 deja en principio la puerta abierta a que –mediante otros recursos distintos– pudiese recuperarse la decidibilidad de este tipo de proposiciones.

Al decir que el teorema VI de Gödel habrá de parecernos «mucho más grave», Torretti se refiere precisamente al cierre de esa posibilidad. No está cerrado por intensión (pues, como hemos dicho, en principio podría haber otros recursos), sino por extensión (porque de hecho no hay otros recursos disponibles para el hombre que no estén ya incluidos en $P$ y los sistemas afines). ¿Por qué sucede esto?

Porque las verdades «sobre números no incluidas ya en la aritmética finitista» son precisamente el conjunto de los «enunciados ideales» que constituyen la aritmética transfinita y que Hilbert pretendía salvar con su programa de 1923. Como hemos visto ya (sobre todo en pp. 310-312) Hilbert quería asegurar la matemática transfinita privándola de significado sustantivo y controlando su manipulación simbólica «desde el terreno de lo finito». Ahora bien, todo el programa de Hilbert descansaba sobre la previa formalización completa de la matemática, tarea que se considerada ya cumplida en los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead y cuyo carácter consistente y completo se daba por sentado, incluso aunque no hubiese demostrado formalmente. Al dar al traste con este presupuesto tácito —y hacerlo precisamente estableciendo una relación de «inversa proporcionalidad» entre consistencia y completitud (en sentido de Post)»— Gödel arruinaba en efecto «todos los recursos de que dispone el hombre» para rescatar y legitimar la matemática transfinita.

*

La llamada «tesis de Church» afirma la equivalencia entre un concepto intuitivo e informal (calculabilidad) y un concepto formal construido artificialmente (computabilidad). Para comprender correctamente el sentido de dicha equivalencia, conviene recordar que lo propio y específico de un lenguaje artificial es que el significado de todos los símbolos utilizados está definido de antemano de manera absolutamente nítida, de modo que por cada uno de ellos se entiende lo que se establece que debe entenderse por ese símbolo, y no ninguna otra cosa. Por tanto, todo el mundo entiende exactamente lo mismo cuando utiliza los términos. Esa absoluta nitidez y transparencia se consigue mediante la ruptura con todos los significados previos (significados que Torretti, muy agudamente, llega a denominar «históricos») en el acto de la definición. El ritual de la definición integral de un concepto supone, en efecto, la ruptura con cualesquiera significados previamente dados o supuestos y comporta siempre —implícita o explícitamente— un acto lingüístico del tipo «a partir de ahora entenderemos por $X$ única y exclusivamente esto». Cuando se adopta este punto de vista, se dice que los términos definidos son términos técnicos, y las definiciones que los hacen nacer se denominan definiciones estipulativas. Esto implica que en un lenguaje artificial todos los términos son términos técnicos. La construcción de un lenguaje artificial constituye, pues, al mismo tiempo, un ejercicio por el que se borran las huellas que la historia de su uso pueda dejar en el significado de las expresiones. Por otro lado, y dado que se ha roto completamente el vínculo con el lenguaje natural, aquí no hay cuestión de verdad o falsedad: las definiciones estipulativas son ni verdaderas ni falsas, sino en todo caso más o menos útiles, más o menos adecuadas.

Pues bien, precisamente porque la tesis de Church establece la equivalencia entre un significado del lenguaje natural y un concepto formal, excluye por su propia estructura la posibilidad de ser demostrado formalmente: la noción de demostración formal presupone que se está operando ya, tanto en lo que respecta a las premisas como a las reglas de derivación, dentro de un lenguaje artificial. Por eso afirma Torretti que la tesis de Church es más bien «una decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad».

➢ **Semana 11** (13 de mayo) – *Capítulos 2.9 y 2.11-2.12*

**21.** ***¿Qué quiere decir que «el problema de la detención es insoluble»?***

El problema de la detención de las máquinas de Turing puede formularse así: ¿es posible determinar cuándo una máquina de Turing se detendrá tras un número finito de etapas de cómputo y cuándo, por el contrario, ciclará infinitamente? En otras palabras: ¿es posible dar con una máquina de Turing (un algoritmo), que, dado el número de identificación de otra máquina de Turing y su entrada, decida si esta segunda se detendrá o no?

La respuesta es negativa: no existe una máquina de Turing con esas características (del mismo modo que no existe un programa informático convencional que, dado el código de otro programa, decida si este va a parar o a iterar infinitamente). Así las cosas, decimos que el «problema de la detención» o «de parada» es *insoluble*. Su demostración se realiza por diagonalización, haciendo uso de la supuesta máquina de Turing $H$ que computa el *halting problem*, y una máquina $H'$, entendida a veces como la *inversa* de $H$, llegando a una contradicción autorreferencial, similar al razonamiento de Gödel en su demostración del primer teorema de incompletitud.

A partir de la insolubilidad del problema de la detención, se extrae como corolario que no puede resolverse el problema de la decisión, el *Entscheidungsproblem*. Recordemos que Hilbert y Ackermann buscaban un algoritmo que decidiera si una fórmula escrita en lógica de primer orden era o no válida en el sistema. Puesto que el teorema de completitud de Gödel nos asegura que todo lo válido es demostrable, bastaría con una máquina de Turing que decidiese si la fórmula es deducible. Es sencillo imaginar una máquina de Turing que va generando todas las posibles demostraciones del sistema y, de este modo, todas las fórmulas deducibles. Ello reduce el problema de la decisión a determinar si ese algoritmo de generación de demostraciones parará sobre una fórmula dada, lo que significaría contar con una máquina de Turing que computara el problema de parada que, como hemos dicho, es insoluble; no existe semejante máquina. Así, por reducción al absurdo, el *Entscheidungsproblem* no puede resolverse positivamente.

De hecho, la relación de las máquinas de Turing con el problema de la decisión es reminiscente del comentario de Gödel en el que asegura que «el problema de la decisión es una reducción de lo no numerable a lo numerable, ya que la *validez* se refiere al conjunto no numerable de todas las fórmulas, mientras que *demostrable* alude solo a la cantidad numerable de las pruebas formales». Del mismo modo, la cantidad de funciones que podríamos querer computar es no numerable, mientras que las máquinas de Turing, aunque infinitas, son numerables. Si pudiera equipararse lo numerable con lo no numerable, entonces todos los problemas serían Turing-computables y habría una máquina de Turing que computaría el problema de parada, que es insoluble.

**22.** ***Gerhard Gentzen utilizó la inducción transfinita en sus dos demostraciones de la consistencia de la aritmética formalizada. Explique y comente la siguiente observación de Torretti (p. 319): «Si el programa de Hilbert acaba recurriendo al transfinito, ¿por qué tantos melindres y reservas ante el paraíso heredado de Cantor? ¿Por qué no instalarse en él, alegremente, de una vez por todas?».***

El consenso generalizado es que, tras la publicación de los resultados de Gödel en 1931, el programa de Hilbert se presenta inviable: el enfoque finitista adoptado como premisa inviolable resulta ser demasiado fuerte para demostrar la consistencia de la matemática y el problema evidenciado por los teoremas de incompletitud se presenta insalvable.

En este contexto, en 1935 y 1938, Gerhard Gentzen publica dos demostraciones de la consistencia de la aritmética formalizada que no contradicen los fatales resultados de Gödel, para lo que se sirve siempre de métodos elementalmente finitos excepto en un paso clave, en el que debe recurrir a una demostración por inducción hasta el transfinito (esto es, una inducción que supera los límites del «modo recursivo de pensar» defendido por Skolem). ¿Podían Hilbert y sus seguidores aceptar esta técnica? En principio, no. Recurrir a la inducción transfinita es un recurso perfectamente válido, pero desde luego no es uno que se ubique en los límites de la matemática finitista. ¿Pero por qué tantos melindres, como dice Torretti, en aceptarlo? ¿Por qué el programa de Hilbert buscaba por todos los medios evitar invocar al transfinito en sus razonamientos sustantivos? Como ya hemos visto, si bien Hilbert coincidía en la incalculable utilidad del paraíso de Cantor, las paradojas a las que este había dado lugar y el talante metafísico con el que su creador había intentado esquivarlas no convencían a Hilbert. Para él, el formalismo finitista haría posible rescatar las ideas del infinito en su totalidad sin recurrir a argumentos tan etéreos como los esgrimidos por los seguidores de Cantor. Y, concretamente, para el programa de Hilbert, «la consistencia era imprescindible, pues solo sobre esa base de podía establecer la consistencia de la teoría de conjuntos formalizada, recuperando así todas las comodidades que ofrece al matemático el paraíso de Cantor sin suscribir la metafísica cantoriana del infinito».

Así las cosas, tras los resultados de Gödel, Hilbert y sus seguidores se encuentran en una encrucijada: siguen teniendo las mismas reservas sobre las cuestiones transfinitas si estas no se formalizan antes y se prueban mediante métodos finitos, pero, a la vez, a la luz de los teoremas de incompletitud, son conscientes de que el programa de Hilbert es ya inviable. Así, ante la evidencia de que la consistencia solo podía lograrse mediante una demostración como la de Gentzen, que solo era posible si, en última instancia, se daba un poco más de libertad, en 1939, Hilbert y Bernays anuncian a sus lectores que, a la luz del descubrimiento de Gödel, su programa de fundamentación de las matemáticas «demanda una ampliación del punto de vista finitista».

En última instancia, las palabras de Hilbert y Bernays no son más que una velada aceptación de su derrota y la adopción de esa libertad matemática defendida por Cantor. Esta libertad, presente en la nueva forma de hacer metamatemática de Gödel o Tarski, pondría de manifiesto que era preciso aceptar y superar los límites del formalismo y abrazar sin reparos la teoría de conjuntos; instalarse de una vez por todas en el paraíso de Cantor.

➢ ***Comentario del profesor David Teira*** (15 de mayo)

Todas mis felicitaciones, porque la calidad de vuestras respuestas, semana a semana, ha hecho un placer la corrección. Una primera cosa que quiero pediros, ahora que hemos terminado con los ejercicios y antes de llegar a los exámenes, me hagáis llegar vuestra opinión sobre el curso (el texto, los ejercicios, la dinámica) bien a mi correo, bien al foro.

De entre vuestras respuestas, me interesaba, sobre todo, la segunda pregunta, por lo que suponía precisamente de valoración del curso. Por supuesto, la habéis comprendido muy bien, pero habéis sido algo tímidos con vuestras opiniones. Pero uno podría preguntarse qué supone «instalarse en el paraíso de Cantor»: el proyecto de Hilbert surge para dar respuestas a las paradojas que plantea el concepto de infinito introducido por Cantor. Al principio de curso veíamos que estas paradojas ponían en cuestión nuestro concepto intuitivo de número. ¿Con qué concepto alternativo hemos de operar, una vez abandonado el proyecto de Hilbert? ¿Cuántos paraísos conjuntistas tenemos a nuestro alcance? Las matemáticas ¿son una o muchas?

Estas son cuestiones abiertas que este curso no pretende resolver, tan sólo ayudaros a poder planteároslas. Espero que os hayan parecido interesantes.

Espero vuestros comentarios. Suerte con los exámenes.

→ *Respuesta 22 de Daniel Rico*

Hilbert quiso situarse en una posición intermedia, de mesura y de apariencia limpia de los excesos metafísicos de Cantor y de las ataduras conservadoras de Brouwer. De modo que aceptaba parte de la teoría de conjuntos pero rechazando aspectos más inciertos como aquellos que están involucrados en el tema de la infinitud. Por otra parte, no quería perder parte de la libertad prometida por Cantor, y por eso pretendía, a través de su «metamatemática» dar base intuicionista a la matemática clásica, dando legitimidad al uso del *tertium non datur*.

Ya que Gödel dio un duro golpe a su programa y Gentzen abrió una pequeña veda, Torretti se pregunta por qué no aceptar la herramienta de la inducción transfinita.

La sugerencia de Torretti de instalarse en el paraíso de Cantor no es una decisión sencilla pues, aún a pesar de la utilidad de las demostraciones de Gentzen, Hilbert aún se encontraría en esa posición de rechazo de la herramienta clave usada en dicha prueba: la inducción transfinita. En este sentido me parece comprensible que Hilbert no se instale en el supuesto paraíso. Es perfectamente posible que hubiera un paraíso más al gusto de Hilbert; no necesita refugiarse, necesariamente, en el techo ya establecido por Cantor. No hay prisa.

Eso sí, el afecto que muestra Torretti por Cantor es evidente en cómo formula el título del libro y lo desarrolla. Dedica una pequeñísima parte del libro a Brouwer y ataca brutalmente a Frege en sus errores. Por otra parte, los saltos metafísicos de Cantor los trata, más que con respeto, con admiración, a veces ridícula: lo califica de «genio matemático» por postular como axioma algo de lo que el propio Cantor tuvo que retractarse posteriormente; esto es lo que ocurre con todo objeto de idolatría: todo lo que hace es fruto del genio propio de éste. Me resulta que, parte de esta dinámica es la que da lugar a esta forma monolítica de pensar en la matemática

«Cantor ha ganado» es lo que dice el libro en su transcurso y término. Yo estoy en completo desacuerdo. La matemática, por muy trascendental y atemporal que parezca, se justifica a través de la filosofía, la ciencia y el tejido cultural de una sociedad. Éstas son temporales.

Llegará un momento en que no tendremos «tantos melindres y reservas», eso sí, en explorar la pluralidad matemática para abarcar, de manera cada vez más amplia, lo que la matemática puede llegar a darnos en sus maneras de pensar.

→ *Respuesta de David Teira a Daniel Rico*

Me parece estupenda la opinión que has formado, Daniel. Pero, en defensa de Torretti, hay que decir que él ha defendido siempre un enfoque pragmatista en filosofía en el que la justificación de cualquier verdad científica es contextual. Otra cosa es su pasión por Cantor.

## **ANEXO** – *Algunas preguntas frecuentes*

A continuación, se adjuntan algunas preguntas frecuentes realizadas por alumnos de otros años sobre conceptos clave de la asignatura. He recopilado las que considero más importantes. La mayoría de las respuestas son de Pedro Pablo Rivas Soriano.

1. ***¿Qué quiere decir la frase «Cantor llama B al dominio formado por los índices de las secuencias fundamentales de racionales»?***

Lo que hace Cantor es construir $\mathbb{R}$ como compleción de $\mathbb{Q}$. En otras asignaturas hemos visto cómo se hace la compleción de un espacio métrico $X$, se toma el espacio de sus sucesiones de Cauchy y se hace módulo por el subespacio de sucesiones que convergen a 0, se obtiene así un nuevo espacio métrico $X'$ que contiene a $X$ y es completo. Los índices de Cantor son los puntos del nuevo espacio, es decir, las clases de equivalencia de sucesiones. Por supuesto, hay que demostrar que las operaciones definidas en el nuevo $X'$ (la distancia, y en este caso, el orden) están bien definidas, o sea que no dependen del representante. La compleción de $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}$, y la compleción de $\mathbb{R}$ es otra vez $\mathbb{R}$ porque $\mathbb{R}$ ya es completo, por eso Cantor encuentra que $B = C = D = \cdots$ .

2. ***No me queda claro en el libro de Torretti la relación entre las series trigonométricas y el desarrollo de las teorías de Cantor sobre el infinito.***

Buscando información en la Wikipedia he visto una explicación que me lo deja más claro, la expongo brevemente. El capítulo de Torretti concluye con un teorema que dice que si una serie de Fourier representa a $f$ en todos los puntos de su intervalo de definición salvo en un conjunto $P$ de $v$-ésima especie, dicha representación es única. Eso quiere decir que hay una sucesión de conjuntos derivados: $P$, $P^1$, $P^2$, $P^2$, $\ldots, P^v = \emptyset$. Pues bien, la clave del asunto es que el teorema sigue valiendo para una sucesión infinita: $P$, $P^1$, $P^2$, $P^2$, $\ldots, P^n, \ldots, P^\omega = \emptyset$. Donde $P^\omega$ es el límite de los conjuntos $P^n$, es decir, su intersección, ya que se trata de una sucesión contractiva. Y sigue siendo válido si tomamos el conjunto derivado de $P^\omega$, que llamamos $P^{\omega+1}$, y así sucesivamente: $P$, $P^1$, $P^2$, $P^2$, $\ldots, P^n, \ldots, P^\omega, P^{\omega+1}, \ldots, P^{\omega+k} = \emptyset$.. De este modo, Cantor habría encontrado por primera vez el ordinal transfinito $\omega$.

3. ***En el capítulo 1.3 me choca que se hable de las ideas de infinito de Cantor, cuando en la pág. 14 vemos que ya en 1807 Fourier definió las series del tipo (1) que se ven a mitad de página, y encima del sumatorio, podemos ver el concepto de infinito. A mi entender ese concepto de infinito es algo similar o idéntico a lo que propone Cantor, ¿no es así?***

La clave creo que está en la diferencia entre infinito potencial e infinito actual. En el análisis clásico los infinitos son potenciales, se entiende la suma de una serie infinita como el límite de sumas parciales finitas, que es algo muy diferente conceptualmente de hacer realmente una suma de infinitos términos (infinito actual), cosa que antes de Cantor no tenía sentido plantearse, sería cosa de locos, como decía Kronecker. Después de Cantor ya sí tendrá sentido, por ejemplo Lebesgue hace cosas como sumar las longitudes de infinitos segmentos tomando la longitud del conjunto unión de los puntos de todos los segmentos, esto ya sí es una suma infinita, diferente de tomar el límite de sumas parciales finitas.

[Aclaración de David Teira] El historiador aquí debe intentar no dejarse llevar por la semejanza en la notación: aunque Torretti ya sugiere que Fourier se refiere a la idea geométrica de función, podemos ir a la referencia que nos propone en nota (*Théorie analytique de la chaleur*, disponible en GoogleBooks) y ver a qué se refiere. En las pp. 250-ss (284 del PDF), vemos cómo Fourier da una interpretación físico-geométrica a sus operaciones de integración, muy alejado del de Cantor (como indica Pedro Pablo). Por supuesto, no es necesario que descendáis tanto en el análisis de los textos, os lo indico sólo como aclaración.

### 4. *Me sorprende que a mitad de página 16 se dice «valores excepcionales». Imagino que quiere decir que hay «valores en los que no se cumplen las hipótesis».*

Los puntos excepcionales, son aquellos en que la serie trigonométrica no converge a *f* (por ejemplo, puntos de discontinuidad de *f*), y a pesar de ello *f* restringida al resto del intervalo tiene un desarrollo único en serie trigonométrica.

### 5. *¿Podría aclarar la distinción entre infinito real y potencial?*

La distinción entre infinito potencial y actual proviene de Aristóteles. No hace falta más que captar la distinción intuitiva que propone Torretti en la p. 24: un infinito potencial es el que no está totalmente dado: no importa cuántos términos hayamos escrito de una serie infinita, siempre podemos calcular otro y anotarlo. Aristóteles no aceptaba que hubiera infinitos actuales: por ejemplo, una clase infinita de secuencias de números racionales. Podemos nombrar semejante conjunto, pero en una perspectiva aristotélica, ese nombre no significaría nada, pues un conjunto infinito no puede estar completamente especificado. Volveremos sobre el tema a lo largo del libro (por ejemplo, en la definición de Gentzen en la página 451), de modo que no es necesario profundizar más ahora.

[Aclaración Pedro Pablo Rivas Soriano]

(i) Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.
(ii) Sea $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ donde $k$ es un número arbitrariamente grande.

El primer conjunto es infinito actualmente, porque es un infinito considerado como un todo. El segundo conjunto es infinito potencialmente, porque es un conjunto todo lo grande que queramos, pero siempre finito. En muchos teoremas matemáticos donde aparece el conjunto de los naturales podríamos sustituir la expresión 1 por la expresión 2 y adaptar el teorema haciendo algunos cambios. Resultaría más engorroso, pero tendría la ventaja de que los infinitos potenciales no producen paradojas, porque son conjuntos finitos. Esta es la clave de la polémica entre Cantor y Kronecker, si hay que utilizar o no infinitos actuales en las matemáticas, al final ganaron la partida los partidarios de los infinitos actuales, pero sigue abierta la pregunta acerca de si aquella fue una decisión acertada.

### 6. *¿Qué quiere transmitir esta frase, de la p. 116, línea 4: «Varias pruebas propuestas en el siglo XIX referían la consistencia de una teoría dudosa a la de otra teoría incuestionada»?*

Quiere decir que se demuestra «si la teoría $A$ es consistente, entonces la teoría $B$ es consistente», donde $A$ es una teoría incuestionada y $B$ es una teoría dudosa (hasta entonces). Por ejemplo, a veces usamos el lema de Zorn, que no se puede demostrar, pero se puede deducir del axioma de elección, por tanto si aceptas el axioma de elección también tienes que dar por bueno el lema de Zorn, aunque ninguno de los dos se puede demostrar. Mejor dicho, si supones que el axioma de elección no genera contradicciones, entonces tampoco las producirá el lema de Zorn, aunque no se puede demostrar la consistencia de ninguno de los dos, simplemente se refiere la consistencia de uno a la del otro.

### 7. *En la p. 117, última línea, ¿qué quiere decir «aunque no haya un inventario de sus elementos o un método efectivo para generarlo»?*

No podemos construir todos los números reales como sucesiones de racionales porque sólo podemos construir sucesiones en las que hay una regla para generar los elementos de la sucesión. Por ejemplo, no podemos construir una sucesión infinita de cifras al azar, sólo podemos generar al azar un número finito de cifras, para tener una sucesión infinita tenemos que dar alguna regla o algoritmo. En realidad, sólo podemos definir una cantidad numerable de números reales, el resto, casi todos (una cantidad no numerable) permanecen en un limbo inaccesible a la mente humana. Para Cantor no había problema porque creía que el conjunto de los números reales estaba en la mente de Dios, aunque nosotros no podamos ver casi ninguno.

### 8. *¿A qué se refiere Torretti con «correspondencia arbitraria»?*

Se puede poner en duda que exista el conjunto de funciones reales de variable real (por ejemplo), ya que no podemos construir cualquier función arbitraria, sino sólo las funciones definidas con procedimientos finitos: dar una regla de cálculo, o una regla en unos cuantos intervalos, o un valor arbitrario pero sólo en un número finito de puntos, etc.

**9.** ***¿Qué quiere decir que «la única tarea pendiente consiste en probar que hay por lo menos una oración que no se puede deducir de los axiomas»?***

Se refiere a la prueba de consistencia de un sistema de axiomas, para Hilbert. De un sistema contradictorio se puede deducir cualquier cosa. Si es consistente, debe haber proposiciones que no se puedan probar.