Elementos de física

Mecánica clásica, gravitación, electromagnetismo y relatividad

Noel Arteche Echeverría

Grado en Matemáticas – Curso 2018/19

UNED Facultad de Ciencias

Índice

Introducción

Estos apuntes se corresponden con la asignatura *Física* del grado en Matemáticas de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), impartida durante el segundo cuatrimestre del primer curso.

El equipo docente de la universidad aconseja para el estudio de la asignatura el famoso *Física para la ciencia y la tecnología*, de Paul A. Tipler y Gene Mosca. Al comenzar a leer los primeros temas, me encontré con una incomprensible situación: pese al extenso, detallado y riguroso desarrollo de Tipler y Mosca, estaba perdido leyendo sobre conceptos que creía dominados en Bachillerato. De pronto, la obtención de principio de conservación de la cantidad de movimiento se antojaba una tarea de dificultad matemática exagerada, cuando sabía de sobra que había explicaciones más simples.

Estos apuntes vienen a cubrir el hueco que deja el libro en lo que se refiere a una explicación más concisa y limitada de los conceptos esenciales para superar la asignatura. La mayor parte de su desarrollo, así como los formularios anexos al final, están extraídos del libro *Física* de la editorial Edebé, pensado para Bachillerato, pero que cubre casi la totalidad del programa de la UNED.

En la redacción he procurado en la medida de lo posible mantener un equilibrio entre la concisión y la necesidad de contexto; le brevedad y la intuición; también el equilibrio entre rigor matemático y sencillez en los desarrollos, de los cuales he conservado los esenciales. En cierto modo, es un resumen pragmático de conceptos fundamentales de física vistos desde los ojos de un matemático. De ahí que hable de *elementos* de física.

Espero que estos apuntes le sean de tanta ayuda a quien los emplee como a mí me ha sido el redactarlos.

Noel Arteche Echeverría

En Donostia / San Sebastián, a 28 de agosto de 2019

Preliminares notacionales

Los vectores son una movida. Y los vectores están en todas partes en física. De hecho, volver a un libro de texto de Bachillerato sorprende por la cantidad de conceptos de cálculo vectorial que se emplean sin haberlos introducido debidamente.

Ante la tarea de redactar unos apuntes como estos, resultaba tentador emplear una notación a mi gusto, matemáticamente más clara y consistente que la de Tipler y más rigurosa que la de Edebé. En general, dada la sencillez de los conceptos y las fórmulas, no hay tanto margen para introducir filigranas notacionales, pero sí quiero matizar un par de cosas en cuanto a los vectores.

Me niego rotundamente a emplear la negrita para denotar vectores: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ parece querer dar énfasis a la notación, no expresar el carácter vectorial de las variables. Siguiendo la reflexión de Grant Sanderson de que los vectores terminan siendo no más que tuplas de números con significado, mi notación favorita, desde la abstracción matemática, es la de la raya superior: $\overline{u}$. Resume perfectamente la idea del vector como objeto que puede reducirse a una ristra de números de cualquier longitud. Sin embargo, en física esto parece no solo no usarse nunca, sino que entra en conflicto con la noción intuitiva del vector como magnitud asociada a una flecha. Naturalmente, pasada la frontera de las tres dimensiones, es difícil conceptualizar una flecha en el espacio, pero, como decía Feynman, «al físico no le interesa el caso general, solo el particular; no le interesan las fuerzas en n dimensiones, sino las fuerzas en tres dimensiones». Así las cosas, he concedido utilizar la fecha superior, $\vec{u}$, para referirme a magnitudes vectoriales. He decidido, eso sí, utilizarla siempre, sin excepción, para recalcar la diferencia entre magnitudes vectoriales y magnitudes escalares, algo básico en un nivel como este.

Asimismo, cuando se trata de la norma, la abstracción matemática me invita a usar $||\overline{u}||$, que expresa la absoluta arbitrariedad y convencionalidad de la norma euclídea. Sin embargo, dado que en estas cuestiones básicas de física hablamos siempre de distancia euclídea, he aceptado mantener las barras simples, conservando la flecha, eso sí, para que $|\vec{u}|$ exprese el módulo de un vector y $|u|$ el valor absoluto de una magnitud escalar (aunque, en rigor, $\mathbb{R}$ sigue siendo un espacio vectorial…). Me niego, en cualquier caso, a usar la ausencia de flecha para referirme al módulo. Tan solo en la cuarta parte, sobre relatividad especial, acepto usar v para expresar el módulo de $\vec{v}$, por coincidir con la notación clásica de la velocidad de la luz, de la que generalmente solo se menciona el módulo como c.

En fin, que los vectores son una movida.

Primera parte

Mecánica clásica

- **Primera ley de Newton** (o *principio de inercia*)

Un cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme si no actúa ninguna fuerza sobre él o si la resultante de las fuerzas que actúan es nula.

- **Segunda ley de Newton** (o *principio fundamental de la dinámica*)

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza resultante $\vec{F}$ no nula, este adquiere una aceleración $\vec{a}$ directamente proporcional a la fuerza aplicada, siendo la masa m del cuerpo la constante de proporcionalidad:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- **Tercera ley de Newton** (o *principio de acción-reacción*)

Si un cuerpo ejerce una fuerza $\vec{F}_{1,2}$ sobre otro cuerpo, este a su vez ejerce sobre el primero una fuerza $\vec{F}_{2,1}$ con el mismo módulo y dirección, pero sentido opuesto:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

Las fuerzas de acción-reacción son simultáneas y, aunque son del mismo módulo y sentidos opuestos, no se anulan, porque se aplican sobre cuerpos distintos.

- **Momento lineal** (o *cantidad de movimiento*)

La *cantidad de movimiento* $\vec{p}$ de un cuerpo representa la dificultad de detener su movimiento. Se define como el producto de la masa por su velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- **Principio de conservación del momento lineal**

Si la resultante de las fueras exteriores sobre un sistema es nula, entonces la cantidad de movimiento de este permanece constante.

- **Momento de una fuerza**

El *momento de una fuerza* es una magnitud vectorial que determina la eficacia de una fuerza para ejercer rotación alrededor de un eje que pase por el origen. Se define como el producto vectorial de la posición y la fuerza:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- **Momento de inercia**

El *momento de inercia* I de una partícula respecto a un eje es el producto de su masa m por el cuadrado de la distancia r al eje de giro:

$$I = mr^2$$

En un sólido rígido discreto compuesto por un conjunto de n partículas de radios $r_1, \dots, r_n$ y masas $m_1, \dots, m_n$, el momento de inercia se obtiene como la suma de los momentos de inercia individuales:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Asimismo, en una masa M continua divida en fragmentos diferenciales dm, el momento de inercia se obtiene como

$$I = \int_M r^2 dm$$

- **<u>Ecuación fundamental de la dinámica de rotación</u>**

La relación entre el momento de la fuerza aplicada a un cuerpo y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ producida en él se expresa en una relación reminiscente del principio fundamental de la dinámica, la *ecuación fundamental de la dinámica de rota*ción:

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}$$

- **<u>Momento angular</u>** (o *momento cinético*)

Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje, además de la cantidad de movimiento, existe otra magnitud que lo caracteriza, que se define como el *momento angular* $\vec{L}$ y se expresa por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Si el eje de giro es un eje de simetría fijo o que se mantiene paralelo a sí mismo, entonces la expresión anterior se simplifica:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- **<u>Principio de conservación del momento angular</u>**

Si la suma de los momentos de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema es cero, el momento angular $\vec{L}$ del sistema permanece constante.

<u>SEGUNDA PARTE</u>

Gravitación

- **<u>Ley de la gravitación universal</u>**

  Por el hecho de tener masa, dos partículas materiales se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas (m_1 y m_2) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa, con una constante de proporcionalidad G conocida como la constante de gravitación universal*, de valor aproximado* $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$.

La fuerza ejercida por la primera masa sobre la segunda se expresa como

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_1$$

de modo que $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$, pues son fuerzas de acción-reacción. Además, son fuerzas a distancia, por lo que no precisan de ningún medio material para actuar. Siempre se presentan a pares.

- **<u>Campo vectorial, campo de fuerzas y campo gravitatorio</u>**

Matemáticamente, un *campo vectorial* es una función $f : V \to W$ que hace corresponder dos espacios vectoriales V y W. Así, a cada vector del espacio V (que podría ser, por ejemplo, un punto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$) se le puede asignar un vector de W que represente alguna magnitud en ese punto.

Los vectores que se asignan a cada punto bien pueden ser fuerzas. Así las cosas, en física llamamos *campo* a la perturbación real o ficticia del espacio determinada por la asignación a cada punto del valor de una magnitud y, en particular, decimos que existe un *campo de fuerzas* en un lugar del espacio si, al colocar en él un cuerpo, este queda sometido a una fuerza.

Concretamente, llamamos *campo gravitatorio* a la perturbación que un cuerpo produce en el espacio por el hecho de tener masa.

- **<u>Trabajo de una fuerza</u>**

El *trabajo* W realizado por una fuerza $\vec{F}$ en un desplazamiento desde un punto A hasta un punto B se define como

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r}$$

Cuando la fuerza es constante, tenemos:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

- **<u>Ley de las fuerzas vivas</u>**

  El trabajo realizado sobre un cuerpo por la fuerza resultante se invierte en variar su energía cinética.

$$W = \Delta E_c$$

- **Campos conservativos**

Un campo de fuerzas se dice *conservativo* si el trabajo que realizan las fuerzas del campo para trasladar una partícula de un punto A a otro punto B depende solo de los puntos inicial y final pero no del camino seguido.

De esta definición se sigue que el trabajo que realizan las fuerzas de un campo conservativo es nulo sobre una trayectoria cerrada. Además, el trabajo realizado por el campo puede expresarse como la variación de una cierta magnitud entre los puntos inicial y final, que resulta ser la *energía potencial*:

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = E_{p_A} - E_{p_B} = -\Delta E_p$$

- **Energía potencial**

La magnitud E_p de la expresión anterior recibe el nombre de *energía potencial*. Es la forma en que se almacena el trabajo realizado por las fuerzas conservativas. Tiene diferentes expresiones según la fuerza (elástica, gravitatoria, eléctrica…) y su origen es arbitrario, pues solo tienen sentido físico las variaciones de energía potencial.

Concretamente, la *energía potencial gravitatoria* de una masa m en un punto del espacio es el trabajo que realiza el campo gravitatorio para trasladar la masa m desde dicho punto hasta el infinito. De hecho, si asignamos energía potencial nula a los puntos situados en el infinito, la energía potencia gravitatoria de una masa m a una distancia r de la masa M que genera el campo gravitatorio es:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

- **Principio de conservación de la energía mecánica**

La *energía mecánica* es la suma de la energía cinética y la energía potencial de un sistema. *Cuando sobre un sistema solo actúan fuerzas conservativas, su energía mecánica permanece constante*:

$$\left.\begin{matrix} W = E_{c_B} - E_{c_A} \\ W = E_{p_A} - E_{p_B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{m_A} = E_{m_B}$$

- **Intensidad del campo gravitatorio**

La *intensidad* $\vec{g}$ de un campo gravitatorio en un punto del espacio es la fuerza que actuaría sobre la unidad de masa situada en ese punto. Su unidad es el newton por kilogramo.

Teniendo en cuenta que la fuerza que ejerce una masa M sobre las partículas en el alcance de su campo viene descrita por la ley de la gravitación universal, tenemos que la intensidad del campo gravitatorio generado por M en una masa m a distancia r es

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}$$

Puesto que el campo gravitatorio creado por M es un *campo central*, el vector $\vec{u}$ es un vector unitario que apunta hacia M, lo que encapsula la idea de que las fuerzas gravitatorias son *atractivas*.

La fuerza gravitatoria sobre una masa m situada en un punto se obtiene en función de $\vec{g}$ como

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

- **Potencial gravitatorio**

El *potencial gravitatorio* en un punto del espacio es el trabajo que realiza el campo gravitatorio para trasladar la unidad de masa desde dicho punto hasta el infinito:

$$V = -G\frac{M}{r}$$

A la luz de esta definición, la diferencia de potencial gravitatorio entre un punto A y un punto B es igual al trabajo realizado para trasladar la unidad de masa desde A hasta B. Es justamente aquí donde se relacionan el potencial y la intensidad del campo gravitatorio:

$$V_A - V_B = \frac{W}{m} = \frac{\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}}{m} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{m} d\vec{r} = \int_A^B \vec{g}\,d\vec{r}$$

De aquí se tiene que el trabajo puede obtenerse en función de la diferencia de potencial como

$$W = m(V_A - V_B)$$

y que la energía potencial gravitatoria viene dada por

$$E_p = mV$$

- **Flujo gravitatorio**

El *flujo* Φ de un campo gravitatorio es una medida de la cantidad de líneas de campo que atraviesan una unidad de superficie. Considerando que una superficie viene representada por un vector $\vec{S}$ cuyo módulo es el área que representa y que es perpendicular a la superficie, tenemos

$$\Phi = \vec{g} \cdot \vec{S}$$

Cuando trabajamos con campos variables de superficie cualquiera, el flujo viene dado por la expresión

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

Cuando una masa M está encerrada por una superficie S de geometría esférica, el flujo es

$$\Phi = -4\pi GM$$

Esta igualdad se conoce en ocasiones como la *ley de Gauss* y permite ver que el campo y el potencial gravitatorios creados por una esfera maciza y homogénea en un punto exterior son los que crearía una masa puntual del mismo valor que la masa total de la esfera situada en el centro de esta. Basándonos en esta idea, podemos asegurar que la ley de la gravitación universal de Newton funciona para cualquier masa esférica sin más que considerar que toda su masa está concentrada en el centro. De ahí que la ley pueda aplicarse a planetas, pese a que no son masas puntuales.

- **Campo gravitatorio terrestre**

Podemos concretar los resultados obtenidos hasta ahora al caso de la Tierra u otros planetas. Sean R_T el radio terrestre ($R_T \approx 6{,}37 \cdot 10^6$ m) y M_T su masa ($M_T \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg). La intensidad del campo gravitatorio terrestre a una altura h sobre la superficie de la Tierra es

$$\vec{g} = -G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}\vec{u}$$

El *peso* de un cuerpo, que es la fuerza con que la Tierra lo atrae, es $\vec{p} = m\vec{g}$, de donde observamos que $\vec{g}$ es precisamente la aceleración de la gravedad.

Asimismo, la energía potencial a una altura h es

$$E_p = -G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

y el potencial gravitatorio

$$V = -G\frac{M_T}{R_T + h}$$

- **Velocidad orbital** (o *primera velocidad cósmica*)

La *velocidad orbital* $\vec{v}$ es la velocidad a la que se mueve un cuerpo alrededor de un planeta en órbita circular de radio r. La fuerza gravitatoria es la fuerza centrípeta del movimiento circular.

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

- **Velocidad de escape** (o *segunda velocidad cósmica*)

La *velocidad de escape* $\overrightarrow{v_e}$ es la velocidad que debe adquirir un cuerpo para escapar de la atracción gravitatoria terrestre (es decir, cuando llega a una distancia infinita de la Tierra con velocidad nula).

$$|\overrightarrow{v_e}| = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

- **Período de revolución**

El *período de revolución* de un planeta es el tiempo que tarda en dar una vuelta circular alrededor del Sol.

$$T = \frac{2\pi r}{|\vec{v}|}$$

- **Energía mecánica de traslación**

La *energía mecánica* de un satélite orbitando alrededor de un planeta es la suma de su energía cinética y su energía potencial gravitatoria.

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

- **Leyes de Kepler**

Las leyes de Kepler rigen el movimiento de planetas y satélite alrededor del Sol. Son tres:

Primera ley de Kepler

Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en uno de sus focos.

Segunda ley de Kepler

La recta que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley de Kepler

El cuadrado del período de revolución de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

De aquí se tiene que la masa de un planeta es $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$.

TERCERA PARTE
Electromagnetismo

- **Principio de conservación de la carga**

En todo proceso electrostático la carga eléctrica total permanece constante.

Además, cualquier carga eléctrica es un múltiplo entero de una unidad elemental de carga. Esta unidad elemental de carga es el *electrón*. Sin embargo, debido al reducido valor de esta magnitud, para medir cargas se emplea el *culombio* (C). La carga de un electrón es aproximadamente $|e| = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

- **Ley de Coulomb**

Por el hecho de tener carga, dos partículas se atraen o se repelen con una fuerza directamente proporcional al producto de las cargas (q_1 y q_2) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa, con una constante de proporcionalidad K de valor aproximado $K \approx 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{C}^{-2}$ en el vacío y en el aire.

La fuerza ejercida por la primera carga sobre la segunda se expresa como

$$\vec{F}_{1,2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$$

Son fuerzas de acción-reacción con la particularidad de que, si ambas cargas son positivas o ambas negativas las fuerzas son de *repulsión*, mientras que si las cargas son de signos contrarios se *atraen*. Además, son fuerzas a distancia, por lo que no precisan de ningún medio material para actuar. Siempre se presentan a pares y verifican el principio de superposición (es decir, la fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas creadas por todas las cargas presentes).

En cuanto a la constante de proporcionalidad K, el valor mencionado antes solo es válido para el aire o el vacío, y en ocasiones de denota por K_0. Para determinar su valor en otros medios debe conocerse un valor propio de estos llamado *constante dieléctrica* o de *permitividad*. La constante dieléctrica del vacío es $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{N}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2}$. Dada la constante dieléctrica del medio, el valor de K se obtiene como

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

o, alternativamente, como $K = \frac{K_0}{\varepsilon_r}$, donde ε_r es una magnitud sin dimensiones denominada *constante dieléctrica relativa*, de la cual puede obtener la constante dieléctrica del medio como $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$.

- **Campo eléctrico**

Llamamos *campo eléctrico* a la perturbación que un cuerpo produce en el espacio que lo rodea por el hecho de tener carga eléctrica.

Los campos eléctricos se describen mediante dos magnitudes fundamentales: una vectorial, la *intensidad del campo eléctrico*, y otra escalar, el *potencial eléctrico*.

- **Intensidad del campo eléctrico**

La *intensidad* $\vec{E}$ de un campo eléctrico en un punto del espacio es la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto. Su unidad es el newton por culombio.

Teniendo en cuenta que la fuerza que ejerce una carga Q sobre las partículas en el alcance de su campo viene descrita por la ley de Coulomb, tenemos que la intensidad del campo eléctrico generado por Q en una carga q a distancia r es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{K\frac{Qq}{r^2}\vec{u}}{q} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}$$

El campo gravitatorio creado por Q es un campo central y el vector $\vec{u}$ es un vector unitario que apunta hacia Q cuando esta carga es negativa, mientras que las líneas de campo apuntan hacia el exterior cuando la carga es positiva.

La fuerza eléctrica sobre una carga q situada en un punto se obtiene en función de $\vec{E}$ como

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- **Potencial eléctrico**

El *potencial eléctrico* en un punto del espacio es el trabajo que realiza el campo eléctrico para trasladar la unidad de carga desde dicho punto hasta el infinito:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

La unidad del potencial eléctrico es el J/C y recibe el nombre de *voltio* (V).

A la luz de esta definición, la diferencia de potencial eléctrico entre un punto A y un punto B es igual al trabajo realizado para trasladar la unidad de masa desde A hasta B. Es justamente aquí donde se relacionan el potencial y la intensidad del campo eléctrico:

$$V_A - V_B = \frac{W}{q} = \frac{\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}}{q} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{q}\,d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}\,d\vec{r}$$

De aquí se tiene que el trabajo puede obtenerse en función de la diferencia de potencial como

$$W = q(V_A - V_B)$$

y que la energía potencial eléctrica viene dada por

$$E_p = qV$$

- **Flujo eléctrico**

El *flujo* Φ de un campo eléctrico es una medida de la cantidad de líneas de campo que atraviesan una unidad de superficie. Considerando que una superficie viene representada por un vector $\vec{S}$ cuyo módulo es el área que representa y es perpendicular a la superficie, tenemos

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Cuando trabajamos con campos variables de superficie cualquiera, el flujo viene dado por la expresión

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- **<u>Ley de Gauss</u>**

El flujo eléctrico Φ *a través de una superficie cerrada* S *es proporcional a la carga eléctrica neta que encierra la superficie*:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- **<u>Campo magnético</u>**

El *campo magnético* es la perturbación que un imán o una corriente eléctrica producen en el espacio que los rodea. Esta perturbación se manifiesta en forma de una fuerza magnética que experimenta cualquier otra carga en movimiento dentro del campo. Las fuerzas del campo no afectan a las cargas en reposo.

- **<u>Intensidad del campo magnético</u>** (o *inducción magnética*)

Para determinar la intensidad del campo magnético se define el *vector campo magnético* o *inducción magnética*, $\vec{B}$. Este vector está relacionado con el vector velocidad de la carga sobre la que actúa en el campo y con el vector de la fuerza que actúa sobre ella. Estos tres vectores $\vec{B}$, $\vec{v}$ y $\vec{F}$ son linealmente independientes, de forma que pueden visualizarse mediante la regla de la mano izquierda, donde $\vec{B}$ es el dedo índice, $\vec{v}$ es el corazón y $\vec{F}$ el pulgar. El sentido de $\vec{B}$ cambiará cuando la carga sea negativa. Teniendo en cuenta que $\vec{B}$ puede obtenerse mediante el producto vectorial de los otros dos, su módulo es:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}|}{|q| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \alpha}$$

donde α es el ángulo que forman $\vec{B}$ y $\vec{v}$.

La unidad de la inducción magnética es el *tesla* (T).

- **<u>Ley de Biot y Savart</u>**

Puesto que los campos magnéticos se generan frecuentemente mediante cargas eléctricas, es importante contar con una ley que permita obtener el campo magnético a partir de las características de la corriente eléctrica en cuestión.

Llamamos *elemento de corriente* al producto $I \cdot d\vec{l}$, donde I es la intensidad de corriente (carga por unidad de tiempo) que atraviesa un conductor de longitud $\vec{l}$ cuyo pequeño tramo es de longitud $d\vec{l}$.

Así las cosas, el campo magnético $d\vec{B}$ creado por un elemento de corriente $I \cdot d\vec{l}$ viene dado por la *ley de Biot y Savart*:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\ d\vec{l} \times \vec{u}}{r^2}$$

Aquí μ_0 es la llamada *constante de permeabilidad*, cuyo valor en el vacío es $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{A}^{-1}$ y $\vec{u}$ es un vector unitario en la dirección de la recta que une el elemento conductor con el punto en el que se está calculando el diferencial del campo y en ese mismo sentido.

Así, para determinar el campo magnético en un punto del espacio por un conducto C lo descomponemos en elementos de corriente y sumamos todos los campos elementales:

$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\ d\vec{l} \times \vec{u}}{r^2}$$

- **<u>Ley de Ampère</u>**

La ley de Gauss para el campo eléctrico relaciona este con sus fuentes, las cargas eléctricas, y nos permite calcular el campo para distribuciones de carga con simetría sencilla. Interesa, de igual modo, obtener una ley que relacione el campo magnético con sus fuentes, las corrientes eléctricas. Esa es la *ley de Ampère*.

En primer lugar, llamamos *circulación del campo magnético* a la integral, a lo largo de cierta trayectoria, del producto escalar del vector inducción magnética por el elemento de trayectoria:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

La *ley de Ampère* establece que la circulación del campo magnético sobre cualquier curva cerrada C es igual al producto de la permeabilidad μ_0 por la intensidad de corriente eléctrica I_C que atraviesa la superficie limitada por la curva C:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_C$$

Esta igualdad solo es válida para corrientes continuas en el espacio.

- **<u>Ley de Lorentz</u>**

Al describir el vector inducción magnética hemos visto que este se definía en función del vector fuerza que actúa sobre una carga en movimiento en el campo magnético. Dicha fuerza recibe también el nombre de *fuerza de Lorentz* y puede obtenerse en una expresión conocida como la *ley de Lorentz*:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

La fuerza magnética siempre es perpendicular a la velocidad de la carga, de modo que no realiza trabajo. Asimismo, no puede modificar su velocidad, pero sí su trayectoria. Cundo una carga positiva entra en un campo magnético uniforme con una velocidad perpendicular al campo, la fuerza de Lorentz le obligará a seguir una trayectoria circular, siendo la fuerza de Lorentz la fuerza centrípeta del movimiento.

- **Fuerza magnética sobre un elemento de corriente**

Un conductor por el que circula corriente eléctrica experimenta una fuerza cuando está situado en un campo magnético. Esta fuerza es la resultante de todas las fuerzas de Lorentz que el campo magnético ejerce sobre las cargas que forman la corriente. En el caso de un hilo conductor rectilíneo de longitud l situdo en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ el valor de la fuerza total sobre el hilo es:

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

- **Fuerzas entre corrientes paralelas**

Haciendo uso de la ley de Biot y Savart puede determinarse que el campo magnético a una distancia d de un conducto rectilíneo muy largo es $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$. Si se colocan dos conductores rectilíneos muy largos en posiciones paralelas a una cierta distancia d, cada una de las corrientes ejercerá una fuerza sobre la otra. Así, Ampère observó que si las corrientes tenían el mismo sentido las fuerzas era atractivas, mientras que, si tenían sentidos opuestos, se repelían. Así las cosas, puede determinarse que la fuerza que experimentan dos conductores con corrientes I_1 e I_2 por unidad de longitud es:

$$\frac{|\vec{F}|}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

A partir de este fenómeno puede definirse la unidad de intensidad de corriente del SI y que hemos venido usando hasta este punto: el *amperio* (A), que es la corriente que circula por dos conductores paralelos como los de escenario anterior separados por un metro en el vacío cuando se atraen o se repelen con una fuerza de $2 \cdot 10^{-7}$ N por metro de longitud.

<u>CUARTA PARTE</u>

Relatividad especial

- **<u>Sistemas de referencia inerciales y no inerciales</u>**

Un sistema de referencia S se dice *inercial* si sobre él se cumplen las leyes de Newton. En particular, se cumple el principio de inercia, las únicas fuerzas que causan movimientos son *fuerzas reales* (que verifican el principio de acción-reacción) y son sistemas que están o bien en reposo o bien en MRU respecto a otros sistemas inerciales. Un observador O en el sistema S es un *observador inercial.*

Por el contrario, un sistema de referencia S' se dice *no inercial* cuando no se verifica el principio de inercia. Por tanto, un cuerpo puede ponerse en movimiento sin que actúen sobre él fuerzas reales, lo que significa que aparecen *fuerzas ficticias*, caracterizadas por no verificar el principio de acción-reacción. Todos los sistemas de referencia no inerciales están acelerados respecto a cualquier sistema de referencia inercial. Un observador O' en el sistema S' es un *observador no inercial.*

- **<u>Principio de relatividad de la mecánica clásica</u>**

> *Cualquier experimento mecánico realizado en un sistema de referencia inercial se desarrollará exactamente igual en un sistema que se mueva a velocidad constante con relación al primero.*

De este principio se deduce que no podemos distinguir si un sistema de referencia está en reposo o si se mueve con velocidad constante; solo podremos saberlo en relación con otros sistemas de referencia. Asimismo, permite asegurar que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes.

- **<u>Transformaciones de Galileo</u>**

Sean S y S' dos sistemas de referencia inerciales, con observadores O y O' respectivamente. Las *ecuaciones de transformación de Galileo* permiten a O' interpretar en su sistema S' las mediciones e informaciones procedentes de O tomadas en el sistema S.

Considerando que S' se aleja de S a velocidad $\vec{u}$ y considerando, por sencillez, que el movimiento tiene lugar sólo a lo largo del eje XX', las transformaciones de Galileo se expresan como:

$$\begin{gathered} x' = x - |u| \cdot t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{gathered}$$

Esto a su vez se resume en la ecuación vectorial $\vec{r}'(t') = \vec{r}(t) - \vec{u}t$, siendo $t' = t$.

Al derivar esta expresión obtenemos la llamada *fórmula clásica de adición de velocidades*, que permite obtener la relación entre las velocidades en dos sistemas de referencia inerciales:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

Derivando de nuevo demostraríamos que la aceleración de un cuerpo tendrá el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales: $\vec{a}' = \vec{a}$.

Por último, como la aceleración y la masa no varían entre sistemas inerciales y, por ser estos precisamente inerciales, se verifica el principio fundamental de la dinámica, tenemos que las fuerzas tampoco varían de un sistema de referencia inercial a otro: $\vec{F}' = \vec{F}$.

Así las cosas, el tiempo, la masa, la aceleración y la fuerza son magnitudes que no varían al cambiar de sistema de referencia inercial, por lo que se conocen como *invariantes de Galileo*. En consecuencia, los intervalos de tiempo y la distancia son también invariantes de Galileo.

- **Sistema del éter**

En 1869, Maxwell publica su síntesis electromagnética. Con su teoría se concluye que la luz es una onda electromagnética y que su velocidad de propagación c en el vacío debe ser

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Al comparar las ondas electromagnéticas con las ondas conocidas hasta la fecha, los físicos de la época atribuyeron a la luz propiedades parecidas a las del sonido. Por consiguiente, puesto que el sonido necesitaba un medio material para propagarse (el aire), este también debería ser el caso para la luz. Este medio no podía ser el aire, porque la luz se propagaba en el vacío, de modo que conjeturaron que el universo estaba lleno de una sustancia misteriosa, el *éter*, por el que las ondas de luz se propagaban a la velocidad c obtenida mediante las ecuaciones de Maxwell. Existía así un sistema, fijo en el éter, que sería el único en el que la velocidad de la luz fuese c, y la velocidad de la luz en cualquier otro sistema se obtendría a partir de la fórmula clásica de adición de velocidades. El *sistema del éter* era un sistema en reposo absoluto, por lo que cualquier velocidad medida en él sería una *velocidad absoluta*.

Con esta idea en mente, Michelson y Morley plantearon la hipótesis de que si pudiera medirse la velocidad $\vec{c}'$ de la luz en la Tierra, podría conocerse la velocidad a la que la Tierra se mueve en el sistema del éter como $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{u}$. Utilizando el llamado inferómetro de Michelson-Morley, llevaron a cabo un experimento con el que esperaban calcular el valor de $\vec{c}'$, pero sus intentos no mostraron ninguna diferencia con el valor en el vacío $\vec{c}$.

La explicación más coherente y que demostró ser cierta posteriormente es que la velocidad de la luz es constante e independiente del movimiento del observador y del movimiento de la fuente emisora.

- **Postulados de Einstein**

A la luz de los resultados contradictorio del experimento de Michelson-Morley, las transformaciones de Galileo parecían no ser correctas. En 1905 el físico alemán Albert Einstein decide desestimar la teoría del sistema del éter. Al hacerlo, el único sistema de referencia con sentido para un observador es el sistema fijo a él mimo, de modo que no es extraño que cualquier observador obtenga siempre el mismo resultado para la velocidad de la luz.

Einstein elabora esta concepción de la física en su *teoría especial de la relatividad*, publicada en 1905 (la *teoría general*, que se ocupa de sistemas no inerciales y de la gravitación, no vería la luz hasta 1916). La relatividad especial, aplicable tanto a fenómenos físicos como electromagnéticos, está basada en dos postulados:

Primer postulado de Einstein

Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

Este postulado es una generalización del principio de relatividad de Galileo. De él se desprende que no hay ningún sistema de referencia especial como el del éter y que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes. Además, las leyes deben ser invariantes y deben tener la misma expresión matemática.

Segundo postulado de Einstein

La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, cualquiera que sea la velocidad de la fuente.

La constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales implica que las transformaciones de Galileo no son válidas y que deberán encontrarse nuevas transformaciones para pasar de un sistema inercial a otro.

- **Transformaciones de Lorentz**

Las transformaciones de Galileo debían ser reemplazadas teniendo en cuenta que la velocidad de la luz era la misma para todos los observadores inerciales. Einstein observó que las transformaciones correctas eran las *transformaciones de Lorentz*, propuestas inicialmente por el físico holandés H. A. Lorentz como un simple pasatiempo matemático. Estas ecuaciones permiten a un observador inercial O' interpretar en su sistema S' la información procedente de un observador O en un sistema de referencia S, suponiendo de nuevo que S' se aleja de S a velocidad $\vec{u}$ y que el movimiento es paralelo al eje XX'.

En lo que sigue denotaremos excepcionalmente por u en lugar de por $|\vec{u}|$ al módulo del vector $\vec{u}$. Definimos dos constantes auxiliares β y γ como:

$$\beta = \frac{u}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Así, las transformaciones de Lorentz son:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - ut) \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t' &= \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \end{aligned}$$

De estas igualdades se interpreta que cada observador mide el tiempo de forma distinta, perdiendo el carácter absoluto e invariante que le otorga la física clásica. Además, no es posible superar la velocidad de la luz, pues si $u \geq c$ entonces $\beta \geq 1$ y así, o bien $\gamma \to \infty$ o bien $\gamma \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, lo que no tiene sentido físico. Cabe destacar que para valores pequeños u (velocidades convencionales), el elevado tamaño de c implica $\beta \to 0$ y $\gamma \to 1$, de modo que las transformaciones de Galileo se convierten en la práctica en un caso particular de las ecuaciones de Lorentz.

- **Simultaneidad relativista**

  Dos sucesos que son simultáneos para un observador no lo son para otro observador que se mueva respecto al primero.

Así, dos sucesos que son simultáneos en S no lo son en un sistema S' que se mueve respecto a S.

- **Dilatación del tiempo**

  El tiempo en un sistema en movimiento parece dilatarse respecto al tiempo medido en un sistema en reposo solidario con el observador.

Así, el intervalo de tiempo de un cierto suceso que tiene lugar en S' parece dilatarse para un observador de S cuando S' se mueve respecto a S.

- **Contracción del espacio**

  En un sistema en movimiento, las longitudes paralelas al desplazamiento parecen contraídas respecto a las longitudes propias de los cuerpos. Este fenómeno también se conoce como contracción de Fitzgerald-Lorentz.

Así, una cierta longitud en el sistema S' es menor medida desde un sistema S cuando S' se mueve respecto a S.

- **Adición relativista de velocidades**

Derivando respecto del tiempo las ecuaciones de posición de Lorentz se obtienen las transformaciones relativistas de la velocidad, que tienen en cuenta que $\Delta t \neq \Delta t'$. Así se obtiene la velocidad $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ que mediría O' a partir de la velocidad $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ medida por O:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *fórmula relativista de adición de velocidades.*

- **Masa relativista**

Einstein dedujo, a partir del principio de conservación de la cantidad de movimiento, que la masa de un cuerpo depende de su velocidad según la siguiente expresión, donde v representa la velocidad a la que lo vemos moverse, m_0 es la masa observada en reposo y m la llamada *masa relativista*:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 = \gamma m_0$$

Según esta nueva fórmula de la masa, esta varía según su velocidad al punto de que si $v \to c$ la masa se hace infinitamente grande, lo que implica que la fuerza necesaria mara moverlo es infinita. De ahí que no sea posible acelerar ningún cuerpo a una velocidad superior a la de la luz.

- **Energía cinética relativista**

Al realizar el desarrollo en serie de la constante auxiliar γ y quedarnos con el primer término tenemos:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \cdots \Rightarrow m \approx \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) m_0 = m_0 + \frac{m_0 v^2}{2c^2}$$

En el último miembro $\frac{m_0 v^2}{2}$ es la expresión habitual de la *energía cinética*. Si consideramos que el truncamiento de la serie por el primer término nos dará valores aceptables para velocidades menores que la de la luz ($v < 9 \cdot 10^7$ m/s, que es el caso habitual), se deduce que la energía cinética, para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz es:

$$m = m_0 + \frac{E_c}{c^2} \Rightarrow E_c = (m - m_0)c^2 \Rightarrow E_c = \Delta m c^2$$

Curiosamente, a pesar de las aproximaciones utilizadas en el desarrollo, la igualdad $E_c = \Delta m c^2$ tiene validez general.

- **Energía relativista total**

La energía cinética es la energía que un cuerpo tiene por estar en movimiento. Sabemos que esta se obtiene como $E_c = mc^2 - m_0 c^2$, de modo que los dos términos de la resta han de ser también energías. Puesto que m_0 es la masa en reposo, $m_0 c^2$ es la llamada *energía en reposo* o *energía propia*. El otro término recibe el nombre de *energía total* E, pues resulta ser exactamente la suma de la energía cinética y la energía en reposo:

$$E = E_c + m_0 c^2 \Rightarrow E = (mc^2 - m_0 c^2) + m_0 c^2 \Rightarrow E = mc^2$$

La última igualdad ilustra el *principio de equivalencia entre masa y energía*. Así, el principio de conservación de la energía y el principio de conservación de la masa se engloban ahora en uno solo:

> *En cualquier sistema de referencia inercial, la energía relativista total de un sistema aislado se mantiene constante.*

<u>Formulario de la primera parte</u>

Cinemática y dinámica clásica

		Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)	**Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRU)**
Cinemática	*Ecuación de la velocidad*	$v = v_0$ (cte.)	$v = v_0 + a(t - t_0)$
	Ecuación de la posición	$x = x_0 + v(t - t_0)$	$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$
		Composición de dos MRU perpendiculares	**Movimiento parabólico**
	Ecuaciones de la posición y la velocidad	Eje X: MRU $x = x_0 + v_x(t - t_0)$ Eje Y: MRU $y = y_0 + v_y(t - t_0)$	Eje X: MRU $x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$ Eje Y: MRUA $y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ donde $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$
		Movimiento circular uniforme (MCU)	**Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA)**
	Velocidad angular	$\omega =$ cte.	$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$
	Posición angular	$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$	$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$

Dinámica de traslación	
Segunda ley de Newton	$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
Principio de conservación de la cantidad de movimiento	$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} =$ cte.

Dinámica de rotación	
Momento de una fuerza	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Momento de inercia	$I = mr^2$
Momento cinético o momento angular	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ y si el eje de giro es un eje de simetría fijo o que se mantiene paralelo a sí mismo: $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Ecuación fundamental de la dinámica de rotación	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
Principio de conservación del momento angular	$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} =$ cte.

Formulario de la segunda parte

Gravitación

		Fórmula	Aplicación
Campo gravitatorio	*Ley de la gravitación universal*	$\vec{F}_{1,2} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_1 = -\vec{F}_{2,1}$	Determina la fuerza con la que se atraen dos masas.
	Intensidad del campo gravitatorio	$\vec{g} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{u}$	Determina el campo gravitatorio creado por una masa puntual en cada punto del espacio y el creado por una masa esférica en un punto exterior.
	Potencial gravitatorio	$V = -G\dfrac{M}{r}$	Determina el potencial gravitatorio creado por una masa puntual en cada punto del espacio y el creado por una masa esférica en un punto exterior.
	Energía potencial gravitatoria	$E_p = -G\dfrac{Mm}{r}$	Permite calcular la energía potencial gravitatoria en un sistema de dos masas.
	Trabajo de las fuerzas gravitatorias	$W = m(V_A - V_B)$	Relaciona el trabajo realizado por las fuerzas gravitatorias con la diferencia de potencial gravitatorio.
	Trabajo de una fuerza	$W = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$	Permite calcular el trabajo realizado por una fuerza variable en un desplazamiento.
	Ley de las fuerzas vivas	$W = \Delta E_c$	Relaciona el trabajo de la fuerza resultante con la variación de la energía cinética.
	Flujo gravitatorio	$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{g}\cdot d\vec{S}$	Ofrece una medida del número de líneas de campo que atraviesan una superficie.
	Ley de Gauss	$\Phi = \int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi GM$	Permite determinar la intensidad del campo gravitatorio para distribuciones de masa con una geometría sencilla.

Relación entre magnitudes gravitatorias	*Fuerza*	*Potencial gravitatorio*
Energía potencial gravitatoria	$E_{p_A} - E_{p_B} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$	$E_p = mV$
Campo gravitatorio	$\vec{F} = m\vec{g}$	$V_A - V_B = \int_A^B \vec{g}\,d\vec{r}$

		Fórmula	Aplicación
Movimiento de planetas y satélites	*Velocidad orbital*	$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{GM}{r}}$	Permite calcular la velocidad de un satélite que describe una órbita circular.
	Velocidad de escape	$\|\vec{v_e}\| = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$	Permite determinar la velocidad que debe adquirir un cuerpo para escapar de la atracción gravitatoria terrestre.
	Energía mecánica de traslación	$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$	Permite calcular la energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular.
	Tercera ley de Kepler	$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$	Relaciona el período de revolución de un planeta con la distancia media del planeta al Sol y permite determinar la masa de los planetas que tienen al menos un satélite con un período y un radio orbital conocidos.

Algunas constantes notables	Constante de gravitación universal (G)	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$
	Radio de la Tierra (R_T)	$6{,}37 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$
	Masa de la Tierra (M_T)	$5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{m}$
	Intensidad del campo gravitatorio sobre la Tierra ($\vec{g}$)	$9{,}8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
	Radio de la Luna (R_L)	$1{,}74 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$
	Masa de la Luna (M_L)	$7{,}47 \cdot 10^{22}\ \mathrm{m}$

<u>Formulario de la tercera parte</u>

Electromagnetismo

El siguiente formulario incluye solo las expresiones que cambian respecto al campo gravitatorio, pues las demás se conservan (e incluso las que permanecen son análogas). La tabla de relaciones entre magnitudes gravitatorias es también válida para el campo eléctrico sin más que intercambiar las magnitudes esenciales.

		Fórmula	Aplicación
Campo eléctrico	*Ley de Coulomb*	$\vec{F}_{1,2} = K\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_1 = -\vec{F}_{2,1}$	Determina la fuerza con la que se atraen dos cargas.
Campo eléctrico	*Intensidad del campo eléctrico*	$\vec{E} = K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}$	Determina el campo eléctrico creado por una carga puntual en cada punto del espacio y el creado por una carga esférica en un punto exterior.
Campo eléctrico	*Potencial eléctrico*	$V = K\dfrac{Q}{r}$	Determina el potencial eléctrico creado por una carga puntual en cada punto del espacio y el creado por una carga esférica en un punto exterior.
Campo eléctrico	*Energía potencial eléctrica*	$E_p = K\dfrac{Qq}{r}$	Permite calcular la energía potencial eléctrica en un sistema de dos cargas.
Campo eléctrico	*Flujo eléctrico*	$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$	Ofrece una medida del número de líneas de campo que atraviesan una superficie.
Campo eléctrico	*Ley de Gauss*	$\mathit{\Phi} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$	Permite determinar la intensidad del campo eléctrico para distribuciones de carga con una geometría sencilla.

Analogías entre el campo gravitatorio y el campo eléctrico

- El campo gravitatorio creado por una masa puntual y el campo eléctrico creados por una carga puntual son campos centrales. Sus líneas de campo son abiertas y tienen simetría radial.
- Son campos conservativos, por lo que tienen una energía potencial y un potencial asociados. El trabajo realizado contra el campo se almacena en forma de energía potencial, de modo que puede recuperarse íntegramente.
- La intensidad del campo es directamente proporcional a la masa o a la carga que lo crea, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a ellas.

Diferencias entre el campo gravitatorio y el campo eléctrico	
Campo eléctrico	*Campo gravitatorio*
- Las fuerzas eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas. Las líneas de campo siempre se originan en las cargas positivas y terminan en las negativas. - La constante K varía de un medio a otro.	- Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas y las líneas de campo siempre señalan a la masa que lo crea. - La constante G es universal.

El valor de K es mucho mayor que el de G. Este hecho implica que, a nivel atómico y molecular, la interacción eléctrica es mucho más fuerte. En cambio, la gran intensidad de las fuerzas eléctricas hace que exista un fuerte equilibrio entre cargas de signo opuesto, de modo que, a grandes distancias, las fuerzas gravitatorias predominan sobre las eléctricas.

Algunas constantes notables	Constante de Coulomb (K_0) – en el vacío	$9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$
	Constante dieléctrica del vacío (ε_0)	$8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}}$
	Constante de Coulomb para otros medios (K)	$K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} = \dfrac{K_0}{\varepsilon_r}$
	Constante de permeabilidad (μ_0) – en el vacío	$4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}$

		Fórmula	**Aplicación**
Campo magético	*Ley de Biot y Savart*	$d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \cdot \dfrac{I\ d\vec{l} \times \vec{u}}{r^2}$	Determina el campo magnético creado por un elemento de corriente $I\ d\vec{l}$.
	Ley de Ampère	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_C$	Relaciona el campo magnético con sus fuentes, las corrientes eléctricas, sobre cualquier curva cerrada.
	Ley de Lorentz	$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$	Determina la fuerza que ejerce un campo magnético.

Diferencias entre el campo eléctrico y el campo magnético	
Campo eléctrico	*Campo gravitatorio*
- Es creado por cualquier carga que esté en reposo o en movimiento. - Afecta a cualquier carga eléctrica que penetre en el campo eléctrico. - Las cargas eléctricas se pueden aislar, existiendo cargas positivas y negativas por separado. - Sus líneas de fuerza son abiertas y van desde las cargas negativas hasta las positivas.	- Es creado por imanes o cargas eléctricas en movimiento. - Solo afecta a cargas eléctricas en movimiento. - Los polos magnéticos no se pueden separar. - Sus líneas de inducción son cerradas. Salen del polo norte y, tras llegar al polo sur, continúan por el interior del imán hasta el polo norte.

Formulario de la cuarta parte

Relatividad especial

		Fórmula	Aplicación
Relatividad especial	*Transformaciones de Galileo*	$x' = x - \lvert u\rvert \cdot t$ $y = y'$ $z = z'$ $t = t'$	Desde el punto de vista clásico, permiten a un observador O' interpretar la información que le llega procedente de un observador O que se mueve respecto a él a velocidad constante.
	Fórmula clásica de adición de velocidades	$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$	Desde el punto de vista clásico, permite relacionar las velocidades por dos observaciones en movimiento relativo.
	Transformaciones de Lorentz	$x' = \gamma(x - ut)$ $y = y'$ $z = z'$ $t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x)$ donde $\beta = \frac{u}{c}$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$	Desde el punto de vista relativista, permiten a un observador O' interpretar la información que le llega procedente de un observador O que se mueve respecto a él a velocidad constante.
	Adición relativista de velocidades	$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$ $v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$ $v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$	Desde el punto de vista relativista, permite relacionar las velocidades por dos observaciones en movimiento relativo.
	Masa relativista	$m = \gamma m_0$	Permite determinar la masa relativista de un cuerpo en movimiento.
	Energía cinética relativista	$E_c = \Delta mc^2$	Permite determinar la energía cinética de un cuerpo en movimiento.
	Energía relativista total	$E = mc^2$	Permite relacionar la energía y la masa relativistas de un cuerpo.

Ideas clave de la relatividad especial

- Solo en los sistemas de referencia inerciales se cumple la primera ley de Newton.
- El tiempo, la masa, la aceleración y la fuerza son invariantes de Galileo.
- La relatividad especial de Einstein se basa en dos postulados:
    1. Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.
    2. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, cualquiera que sea la velocidad de la fuente.

- Las consecuencias de las transformaciones de Lorentz son:
  - Dos sucesos simultáneos para un observador no lo son para otro que se mueva respecto al primero.
  - El tiempo de un sistema en movimiento parece dilatarse respecto al tiempo medido en un sistema en reposo solidario con el observador.
  - En un sistema en movimiento, las longitudes parecen contraídas respecto a las longitudes propias de los cuerpos (contracción de Fitzgerald-Lorentz).
- La masa relativista de un cuerpo aumenta con su velocidad.
- Existe una equivalencia entre masa y energía, pues una se puede convertir en otra.